

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 12



Ярославль 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Ярославский государственный технический университет»

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 12

Ярославль
Издательский дом ЯГТУ
2017

УДК 51:378
ББК 22.1
М34

М34 Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. – Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. – 394 с.

ISBN 978-5-9914-0645-1

В сборнике представлены научные статьи по актуальным вопросам математики, физики, информатики и методике их преподавания, а также математического моделирования технических, химических и технологических процессов и систем.

УДК 51:378
ББК 22.1

Редакционная коллегия: Ю.К. Оленикова (председатель), А. В. Бородин, Д.О. Бытев, А.Н. Жаров, В. Ш. Ройтенберг.

Рецензенты: кафедра микроэлектроники и общей физики Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова;
Д.Ф. Белоножко, д-р физ.-мат. наук, профессор Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

ISBN 978-5-9914-0645-1

© Ярославский государственный
технический университет, 2017

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 517.925

В. В. Абрамов

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: v.abramov@rsu.edu.ru

ВЕТВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОТ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Исследована нормальная периодическая система обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности бесконечности. Предполагается, что в правой части системы выделена критическая линейная часть. Получены условия существования периодического решения с бесконечно большим начальным значением. Используются нелинейные свойства оператора монодромии.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, периодическое решение, малый параметр, оператор монодромии.

V. V. Abramov

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: v.abramov@rsu.edu.ru

BRANCHING OF A PERIODIC SOLUTION FROM INFINITY

We have investigated a normal periodic system of ordinary differential equations in a neighborhood of infinity. It is assumed that in the right-hand side of the system a critical linear part is singled out. We have obtained the conditions for the existence of a periodic solution with an infinitely large initial value. The properties of the monodromy operator are used.

Keywords: differential equations, periodic solution, small parameter, operator of monodromy.

В монографии [1] на основе свойств мажорирующей системы установлен признак существования периодического решения системы с некритической линейной частью, выделенной в окрестности бесконечности. В данной работе рассмотрим критический случай существования периодического решения системы указанного типа.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \mu), \quad (1)$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ – малый параметр, правая часть является ω -периодической интегрируемой по t , гладко зависит от фазовой переменной и от параметра, $f'_x(t, \infty, 0_m) = 0_{nn}$ в том смысле, что $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^{-1} \|f(t, \alpha x, 0_m)\| \equiv 0$.

Определение 1. Решение вида $x(t, a^*, \mu^*)$, $x(0, a^*, \mu^*) = a^*$, системы (1) будем называть *большим*, если существует параметризация $a^* = a(\alpha)$, $\mu^* = \mu(\alpha)$, $\Delta < \alpha$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} a^* = \infty$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mu^* = 0_m$. При этом пара $(a'(+\infty), \mu'(+\infty))$ задает направление ветвления.

Задача. Найти условия, при которых система (1) имеет большое ω -периодическое решение.

Заметим, что в случае линейной системы с периодическими коэффициентами рождение периодического решения из бесконечности с иной точки зрения изучалось в работе [2].

Для решения поставленной задачи будем использовать схемы рассуждений, предложенные в работах [3–5].

Установим структуру оператора монодромии системы (1). Так как в окрестности бесконечности фазового пространства при нулевом параметре правая часть рассматриваемой системы близка к линейной и гладко зависит от фазовой переменной и от параметра, то при достаточно малых значениях параметра решения с большими по норме начальными значениями продолжаемы, по крайней мере, при $t \in [0, \omega]$. Решение системы (1) представим в виде $x(t, a, \mu) = X(t)a + y(t, a, \mu)$, где $X(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей линейной системы $\dot{x} = A(t)x$ при $\mu = 0_m$,

$X(0) = E$, $y(t, a, \mu) = X(t) \int_0^\omega X^{-1}(\tau) f(\tau, x(t, a, \mu), \mu) d\tau$ – решение линейной системы $\dot{x} = A(t)x + f(t, x(t, a, \mu), \mu)$ с нулевым начальным значением. Вычислим производную сложной функции, применив теорему 2.2 из [1]:

$$\begin{aligned} y'_a(t, \infty, 0_m) &= X(t) \int_0^\omega X^{-1}(\tau) f'_x(\tau, \infty, 0_m) x'_a(t, \infty, 0_m) d\tau = \\ &= X(t) \int_0^\omega X^{-1}(\tau) \cdot 0_{nn} \cdot X(t) d\tau = 0_{nn}, \text{ то есть } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^{-1} \|y(t, \alpha a, 0_m)\| \equiv 0. \end{aligned}$$

Без ограничения общности рассуждений далее будем предполагать, что имеет место равенство $y(\omega, a, \mu) = p(a, \mu) + \varphi(a, \mu)$, в котором $p(a, \mu) = \text{colon}(p_1(a, \mu), \dots, p_n(a, \mu))$ – главная нелинейная однородная часть оператора монодромии, $\varphi(a, \mu) = \text{colon}(\varphi_1(a, \mu), \dots, \varphi_n(a, \mu))$, $p_i(\alpha a, \mu / \alpha) = \alpha^{k_i} p_i(a, \mu)$, $0 < k_i < 1$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^{-k_i} \|\varphi_i(\alpha a, \mu / \alpha)\| \equiv 0$, $i = \overline{1, n}$.

Итак, оператор монодромии системы (1) в окрестности бесконечно-сти имеет в вид

$$x(\omega, a, \mu) = Xa + p(a, \mu) + \varphi(a, \mu). \quad (2)$$

Рассмотрим критический случай по линейному приближению $\det(X - E) = 0$, $X = X(\omega)$ – матрица монодромии. При этом система

$$[X - E] a_0 = 0_n \quad (3)$$

имеет общее решение вида $a_0 = Kz$, где K – фундаментальная $n \times r$ -матрица решений системы (3), $z \in \mathbb{R}^r$ – произвольный вектор. Допустим, при некотором значении z выполняется равенство

$$p(a_0, \mu_0) = 0_n. \quad (4)$$

Предположим, выполняется условие

$$\text{rang } J(a_0, \mu_0) = n \leq r + m, \quad (5)$$

в котором $J(a_0, \mu_0) = [p'_a(a_0, \mu_0)K \quad p'_\mu(a_0, \mu_0)]$.

Теорема 1. Если выполняются условия (3), (4) и (5), то система (1) – (2) имеет большое ω -периодическое решение вида $x(t, a^*, \mu^*)$, $a^* = \alpha(a_0 + Kz(\alpha))$, $\mu^* = \alpha^{-1}(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha))$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} z(\alpha) = 0_n$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{\mu}(\alpha) = 0_m$.

Доказательство. Пару (a, μ) , определяющую периодическое решение в силу равенства $x(\omega, a, \mu) - a = 0_n$, для системы (1) при соотношении (2), будем искать, предполагая

$$a = a^* = \alpha(a_0 + Kz), \quad \mu = \mu^* = \alpha^{-1}(\mu_0 + \lambda), \quad \alpha > 0.$$

Аналогично доказательству теоремы 1 из работы [4] можно установить, что в данном случае условия (3) и (4) являются необходимыми для существования большого периодического решения.

В силу условий (3), (4), (5) получим бифуркационное уравнение

$$\begin{aligned} & x(a^*, \mu^*) - a^* = \\ & = S(\alpha)(J(a_0, \mu_0) \cdot \text{colon}(z, \lambda) + \tilde{p}(z, \lambda) + S^{-1}(\alpha)\varphi(a^*, \mu^*)) = 0_n, \end{aligned} \quad (6)$$

в котором $S(\alpha) = \text{diag}(\alpha^{k_1}, \dots, \alpha^{k_n})$, $\tilde{p}(z, \lambda) = p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda) - J(a_0, \mu_0) \cdot \text{colon}(z, \lambda)$. По условию (5) возможно разложение $J(a_0, \mu_0) \cdot \text{colon}(z, \lambda) = Bv + B_1v_1$, где $n \times n$ -матрица B составлена из линейно независимых столбцов матрицы $J(a_0, \mu_0)$, а $n \times (n - m - r)$ -матрица B_1 составлена из остальных столбцов. Выберем $v_1 = 0_{n-m-r}$. Определим функцию $\psi(\alpha, v) = S^{-1}(\alpha)\varphi(a^*, \mu^*) + \tilde{p}(z, \lambda) - Bv$, для которой $\psi(+\infty, 0_n) = 0_n$, $\psi'_v(+\infty, 0_n) = 0_{nn}$. Тогда уравнение (6) принимает вид

$$\bar{g}(\alpha, v) = Bv + \bar{\psi}(\alpha, v) = 0_n. \quad (7)$$

Так как $\bar{g}(+\infty, 0_n) = 0_n$, $\bar{g}'_v(+\infty, 0_n) = B$ и $\det B \neq 0$, то по теореме о неявной функции уравнение (7) определяет функцию $v = v(\alpha)$, $\Delta < \alpha$, $v(+\infty) = 0_n$, для которой $\bar{g}(\alpha, v(\alpha)) \equiv 0_n$. Итак, по определению 1 пара (a^*, μ^*) , в которой $a^* = \alpha(a_0 + Kz(\alpha))$, $\mu^* = \alpha(\mu_0 + \lambda(\alpha))$, векторы $z = z(\alpha)$ и $\lambda = \lambda(\alpha)$ составлены из компонент векторов $v = v(\alpha)$ и $v_1 = 0_{n-m-r}$, задает большое ω -периодическое решение вида $x(t, a^*, \mu^*)$ системы (1) – (2). Теорема 1 доказана.

С практической точки зрения отбор направлений ветвления по условию (4) может представлять затруднения. Поэтому теорему 1 дополним признаком, опирающимся на проверку условий типа неравенств. С этой целью вместо необходимого условия типа равенства для направления ветвления выберем априорную оценку начального значения решения.

Допустим, в окрестности бесконечности левый оператор монодромии имеет вид

$$x(-\omega, a, \mu) = \bar{X}a + \bar{p}(a, \mu) + \bar{\varphi}(a, \mu), \quad (8)$$

где $\bar{X} = X(-\omega)$, $\bar{p}(\alpha a, \mu / \alpha) = S(\alpha)\bar{p}(a, \mu)$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S^{-1}(\alpha)\bar{\varphi}(\alpha a, \mu / \alpha) \equiv 0_n$.

Применим формулу Эйлера для однородной функции и получим соотношения

$$\bar{P}(a)a = \bar{p}(a, 0_m), \quad P(a) = \text{diag}(1/k_1, \dots, 1/k_n)\bar{p}'_a(a, 0_m),$$

$$P(a, \mu)a = p(a, \mu), \quad P(a, \mu) = \text{diag}(1/k_1, \dots, 1/k_n)p'_a(a, \mu).$$

Определим подмножества конуса неотрицательных векторов

$$K(\sigma) = \{a \in \mathbb{R}^m : \|a\| > \sigma, a \geq 0_m\}, \quad \bar{K}(\sigma) = \{a \in \mathbb{R}^m : \|a\| = \sigma, a \geq 0_m\}.$$

Здесь и далее неравенства для векторов и матриц имеют покомпонентный смысл.

Предположим, что выполняются условия:

$$X \geq 0_{nn}, \bar{X} \geq 0_{nn}; \quad (9)$$

при всех $\lambda \in \bar{K}(1)$ и при всех больших $\alpha > 0$ для некоторого значения $\mu = \mu_0$ справедливы оценки:

$$\bar{P}(\lambda) \geq B \geq 0_{nn}, \bar{X} + B > 0_{nn}, \quad (10)$$

$$\|X + \alpha^{-1}S(\alpha)\bar{P}(\lambda)\| \leq 1 - b/\alpha^{1+k}, \quad b > 0, k > 0, \quad (11)$$

$$P(\lambda, \mu_0) \geq D \geq 0_{nn}, \quad X + D > 0_{nn}, \quad (12)$$

$$\|\bar{X} + \alpha^{-1}S(\alpha)P(\lambda, \mu_0)\| \leq 1 - d/\alpha^{1+k}, \quad d > 0, k > 0. \quad (13)$$

Теорема 2. Если выполняются условия (2), (9) – (14), то система (1) имеет большое ω -периодическое решение.

Доказательство. В силу неравенств (9), (10), (12) по групповому свойству решений существует такое число $\sigma > 0$, что $x(\omega, a, \mu) \in K(\sigma)$ при условиях $a \in K(\sigma)$ и $\mu = \mu_0/\alpha$, $\alpha > \sigma$. То есть множество $K(\sigma)$ инвариантно для правого оператора монодромии.

Так как $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S^{-1}(\alpha)\bar{\varphi}(\alpha a, \mu/\alpha) \equiv 0_n$, то существует такое $\delta_1 \geq \sigma$, что $\|\bar{\varphi}(\alpha\lambda, 0_m)\| \leq b/(2\alpha^k)$ для любого $a = \alpha\lambda \in K(\delta_1)$. При этом из условия (11) следует оценка $\|x(-\omega, a, 0)\| < (1 - b/(2\|a\|^k))\|a\| < \|a\|$. Поэтому найдется такое $q > 2$, что при достаточно большом $\delta_2 \geq \delta_1$ для любого $\alpha > \delta_2$ справедлива оценка $\|x(-\omega, \alpha\lambda, \mu_0/\alpha)\| < (1 - b/(q\alpha^k))\alpha < \alpha$. Тогда по групповому свойству решений получим, что $\|x(\omega, \alpha\lambda, \mu_0/\alpha)\| > \alpha$.

Рассуждая аналогично предыдущему, можно установить, что по условию (13) при достаточно большом $\delta_3 \geq \sigma$ для любого $\alpha > \delta_3$ справедлива оценка $\|x(\omega, \alpha\lambda, \mu_0/\alpha)\| < (1 - d/(2\alpha^k))\alpha < \alpha$.

Итак, при любом $\alpha > \max\{\delta_2, \delta_3\}$ существует конусный отрезок $K_\alpha = \{a = \alpha\lambda \in \mathbb{R}^n : 0 < \Delta(\alpha) \leq \alpha \leq \delta(\alpha), \lambda \geq 0_n, \|\lambda\| = 1\}$, для которого $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \Delta(\alpha) = +\infty$ и $x(\omega, \alpha\lambda, \mu_0/\alpha) : K_\alpha \rightarrow \text{int } K_\alpha$ (или $x(-\omega, \alpha\lambda, \mu_0/\alpha) :$

$K_\alpha \rightarrow \text{int } K_\alpha$). Компактное множество K_α гомеоморфно выпуклому множеству (например, множеству $\{a \in \mathbb{R}^n: \Delta(\alpha) \leq \|a\|_1, a \geq 0_n\}$, где обозначено $\|a\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|$). Поэтому по теореме Брауэра о неподвижной точке существует $a^* = a(\alpha) \in \text{int } K_\alpha$, для которого $x(\omega, a^*, \mu^*) = a^*$, $\mu^* = \mu_0 / \alpha$ (или $x(-\omega, a^*, \mu^*) = a^*$). Итак, по определению 1 $x(t, a^*, \mu^*)$ – большое ω -периодическое решение для системы (1). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
2. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях периодических траекторий линейных неоднородных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 66–71.
3. *Абрамов В.В.* Устойчивость малого периодического решения // Вестник РАЕН. 2013. Т. 13, № 4. С. 3–5.
4. *Абрамов В.В.* Малое периодическое решение системы с параметром // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. – Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 3–12.
5. *Абрамов В.В.* Ветвление периодического решения с положительным начальным значением // Вестник РАЕН. 2017. Т. 17, № 4. С. 4–7.

УДК 532.59

Д. Ф. Белоножко, А. А. Очиров, С. Е. Кокин

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, г. Ярославль, e-mail: belonozhko@mail.ru

О ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ НА ВОЗМУЩЕННОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

В асимптотическом аналитическом анализе выведены соотношения, описывающие траектории движения жидких частиц, прилегающих с разных сторон к границе раздела двух несмешивающихся вязких жидкостей, вдоль которой распространяется капиллярно-гравитационная волна.

Ключевые слова: вязкая жидкость, индивидуальная жидкая частичка, массоперенос.

D. F. Belonozhko, A. A. Otchirov, S. E. Kokin

*P.G. Demidov Yaroslavl State University
Russia, Yaroslavl, e-mail: belonozhko@mail.ru*

ON A MOTION OF A LIQUID PARTICLES AT DISTURBED INTERFACE BETWEEN TWO VISCOUS LIQUIDS

The analytical asymptotical expressions are derived for description of trajectories of liquid particles adjoined from different sides into interface between two viscous liquids participated in capillary-wave motion.

Keywords: *viscous liquid, individual liquid particle, mass-transfer.*

Введение. В работе предлагается методика построения траекторий индивидуальных жидких частиц, прилегающих к горизонтальной границе раздела двух жидкостей, по которой распространяется капиллярно-гравитационная волна заданной длины. Задача является естественным обобщением аналогичных исследований, проведенных в рамках модели идеальной жидкости, и обусловлена необходимостью расширения представлений о качественных свойствах массо-переносных процессов, сопровождающих волновое движение стратифицированной жидкости [1].

1. Постановка задачи. Рассматриваются две вязкие несмешивающиеся жидкости, по горизонтальной границе раздела которых распространяется капиллярно-гравитационная волна заданной длины. Верхняя жидкость считается менее плотной, чем нижняя. Ставится задача расчета движений материальных жидких частиц непосредственно примыкающих с разных сторон к границе раздела и соотнесения полученного результата с результатами исследования явления в рамках модели идеальной жидкости.

Задача решалась в прямоугольной декартовой системе координат с осью Oz направленной вертикально вверх против направления действия поля силы тяжести \mathbf{g} . Считалось, что периодическая волна с волновым числом k и амплитудой a распространяется горизонтально вдоль оси Ox . Для простоты движения жидкостей и границы и раздела полагались независящими от второй горизонтальной координаты y . Математическая формулировка задачи расчета поля скоростей и эволюции границы раздела в первом приближении по амплитуде волны имеет вид:

$$z > 0: \quad \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} - \nu_2 \left(\frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial z^2} \right) = 0; \quad \text{div}(\mathbf{U}_2) = 0; \quad (1)$$

$$z < 0: \quad \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} - \nu_1 \left(\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial z^2} \right) = 0; \quad \text{div}(\mathbf{U}_1) = 0; \quad (2)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad |\mathbf{U}_2| \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty: \quad |\mathbf{U}_1| \rightarrow 0; \quad (3)$$

$$z = \xi: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \mathbf{u}_1; \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2; \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2; \quad (4)$$

$$-(\rho_1 - \rho_2) g \xi + p_1 - p_2 - 2\rho_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} + 2\rho_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0; \quad (5)$$

$$\rho_1 v_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = \rho_2 v_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{U}_j \equiv \mathbf{U}_j(x, z, t) = u_j \mathbf{e}_x + v_j \mathbf{e}_z$ - поле скоростей в j -той жидкости с горизонтальной компонентой $u_j \equiv u_j(x, z, t)$ и вертикальной $v_j \equiv v_j(x, z, t)$. Нижней жидкости соответствует индекс $j=1$, верхней - $j=2$. Символами ρ_j и ν_j обозначены плотности и кинематические вязкости жидкостей ($\rho_1 > \rho_2$), а p_j - давления в них. Искажение границы раздела, вызванное распространением волны, описывается переменной $\xi \equiv \xi(x, t)$. При этом учитывается, что на самой границе раздела действуют капиллярные силы, характеризуемые коэффициентом поверхностного натяжения γ .

2. Решение задачи. Решение задачи искалось в виде периодической бегущей волны с комплексной частотой S :

$$\xi = a \exp(S t - i k x); \quad (7)$$

$$u_j = F_j(z) \exp(S t - i k x); \quad v_j = G_j(z) \exp(S t - i k x);$$

$$p_j = H_j(z) \exp(S t - i k x).$$

Подстановка соотношений (7) в уравнения (1) и (2) с учетом условий на бесконечности (3) позволяет конкретизировать вид функций $F_j(z)$, $G_j(z)$, $H_j(z)$ и записать искомые величины в виде:

$$u_1 = (A_1 \exp(k z) + B_1 \exp(q_1 z)) \exp(S t - i k x);$$

$$v_1 = \left(i A_1 \exp(k z) + \frac{i B_1}{q_1} \exp(q_1 z) \right) \exp(S t - i k x);$$

$$p_1 = -i A_1 \frac{\rho_1 S}{k} \exp(k z) \exp(S t - i k x); \quad (8)$$

$$u_2 = (A_2 \exp(-k z) + B_2 \exp(-q_2 z)) \exp(S t - i k x);$$

$$\begin{aligned}
 v_2 &= \left(i A_2 \exp(-k z) + \frac{i B_2}{q_2} \exp(-q_2 z) \right) \exp(S t - i k x); \\
 p_2 &= -i A_2 \frac{\rho_2 S}{k} \exp(-k z) \exp(S t - i k x); \\
 q_j &= \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu_j}}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

При вычислении квадратных корней (9) из двух значений корня следует выбирать то, для которого действительная часть положительна. В соотношениях (8) A_1, B_1, A_2, B_2 - константы, определяемые с помощью граничных условий (4) - (6). Подставляя (8) в (4) - (6) несложно получить однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно пяти констант A_1, B_1, A_2, B_2 и a . Для её разрешимости должен обращаться в ноль соответствующий определитель, что приводит к дисперсионному уравнению, связывающему комплексную частоту S , волновое число k и другие параметры задачи:

$$\begin{aligned}
 &S^2 \left(-k S (\rho_1 - \rho_2)^2 + S (\rho_1 + \rho_2) (q_2 \rho_1 + q_1 \rho_2) + 2 \rho_1 \rho_2 k^2 (\nu_1 + \nu_2) (q_1 + q_2) \right) - \\
 &-\Omega^2 (\rho_1 - \rho_2) \left((k - q_2) (S + 2\nu_1 k^2) \rho_1 + (k - q_1) (S + 2\nu_2 k^2) \rho_2 \right) = 0; \tag{10}
 \end{aligned}$$

Здесь $\Omega^2 = k g \left(1 + k^2 \gamma / (g (\rho_1 - \rho_2)) \right)$ - квадрат частоты волнового движения в пределе исчезающе малой вязкости. Константы A_1, B_1, A_2, B_2 выражаются через амплитуду волны a с помощью той же системы уравнений, определитель которой был использован для составления дисперсионного уравнения (10):

$$\begin{aligned}
 A_1 &= i \zeta \frac{(\rho_2 S^2 (q_1 + q_2) - \Omega^2 (\rho_1 - \rho_2) (k - q_2))}{S (k (\rho_1 - \rho_2) + q_1 \rho_2 - q_2 \rho_1)}; \\
 B_1 &= -i \zeta q_1 \frac{(k (\rho_1 - \rho_2) (S^2 + \Omega^2) - q_2 S^2 (\rho_1 + \rho_2) - q_2 \Omega^2 (\rho_1 - \rho_2))}{k S (k (\rho_1 - \rho_2) + q_1 \rho_2 - q_2 \rho_1)}; \\
 A_2 &= -i \zeta \frac{(\rho_1 S^2 (q_1 + q_2) - \Omega^2 (\rho_1 - \rho_2) (k - q_1))}{S (k (\rho_1 - \rho_2) + q_1 \rho_2 - q_2 \rho_1)}; \\
 B_2 &= -i \zeta q_2 \frac{(k (\rho_1 - \rho_2) (S^2 - \Omega^2) + q_1 S^2 (\rho_1 + \rho_2) + q_1 \Omega^2 (\rho_1 - \rho_2))}{k S (k (\rho_1 - \rho_2) + q_1 \rho_2 - q_2 \rho_1)}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Выражение для $\xi = a \exp(St - ikx)$ вместе с соотношениями (8) - (11) определяют комплексное решение задачи (1) - (6). Реальный физический смысл имеет только действительные части от выражений для ξ , u_j , v_j .

Построенное решение выражает поле скоростей в эйлеровом описании, связывающем значение скорости не с конкретной частичкой жидкости, а с точкой пространства с координатами (x, z) через которую, сменяя друг друга, непрерывно перемещаются различные жидкие частички. Для получения траекторий этих частичек нужно перейти к лагранжевому описанию [1], в котором вектор скорости связан именно с жидкой частичкой. В первом приближении по амплитуде волны переход к элейровые переменные u_j , v_j совпадают с лагранжевыми, если их аргументы (x, z) формально заменить на (x_0, z_0) - положение индивидуальной жидкой частички в момент начальный момент времени $t = 0$ [1, 2]. В связи с этим траектория материальной жидкой частички в рассматриваемом приближении описывается соотношениями [2]:

$$X_j = x_0 + \int_0^t u_j(x_0, z_0, \tau) d\tau; \quad Z = z_0 + \int_0^t v_j(x_0, z_0, \tau) d\tau. \quad (12)$$

Здесь $u_j(x, z, \tau)$ и $v_j(x, z, \tau)$ - компоненты поля скоростей, разрешающие задачу (1) - (6).

3. Анализ решения. Соотношения (8) - (12) дают возможность вычислить траектории, по которым движется материальная частичка j -той среды из начального положения (x_0, z_0) , если по границе раздела жидкостей распространяется затухающая со временем капиллярно-гравитационная волна:

$$\xi = a \cos(\omega t - kx) \exp(-rt); \quad \omega = \text{Im}(S); \quad r = -\text{Re}(S) > 0.$$

Значение S рассчитывается как корень дисперсионного уравнения (10).

Расчеты показали, что вне тонких приповерхностных пограничных слоев, толщина каждого из которых в j -той среде равна $\delta_j \approx \sqrt{\nu/(2\omega)}$, материальные частички ведут себя в полном соответствии с представлениями модели идеальной жидкости [1, 3]. Они совершают периодические круговые движения с радиусом порядка амплитуды волны, умноженной на $\exp(-k|z|)$ и периодом $T = 2\pi/\omega$. При этом направление циклического движения частиц в верхней среде противоположно циклическому движе-

нию в нижней области. Если волна по границе раздела распространяется вправо, то в нижней среде частички циркулируют по часовой стрелке, а в верхней – против.

Внутри вертикальной полосы $\xi - \delta_1 < z < \xi + \delta_2$ происходит своего рода «выравнивание» движений: окружности-траектории сжимаются в поперечном направлении и на некотором выделенном уровне вырождаются в вертикальный отрезок, вдоль которого материальные частички совершают только вертикальные колебательные движения. Расчеты показывают, что положение выделенного уровня зависит от динамических вязкостей жидкостей. Этот уровень находится в той области, которой соответствует среда с меньшей динамической вязкостью.

Заключение. Распространение капиллярно-гравитационной волны по границе раздела вязких несмешивающихся жидкостей инициирует довольно сложное циркуляционное движение жидких частиц вблизи этой границы. Характер циркуляционного движения определяется расстоянием отслеживаемой материальной частички до границы раздела. Вне тонкого пограничного слоя, ширина которого зависит от вязкости жидкости, жидкие частички циркулируют в полном согласии с моделью идеальной жидкости. Непосредственно на границе частички более тяжелой нижней жидкости (при условии, что она обладает большей динамической вязкостью) увлекают тормозящие их частички верхней среды. В результате малый материальный элемент поверхности раздела двигается по петле, сжатой в горизонтальном направлении. Это сжатие тем сильнее, чем ближе друг к другу значения динамических вязкостей сред. На малой по сравнению с толщиной пограничного слоя высоте над свободной поверхностью внутри пограничного слоя выделяется уровень, частички которого совершают только вертикальные колебательные движения. Частички верхней среды, расположенные над выделенным уровнем, двигаются по петлеобразным траекториям с обходом витка в направлении противоположном тому, что наблюдается в нижней жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ле Блон П.* Волны в океане Ч.1 / П. Ле Блон, Л. Майсек. М.: Мир. 1981. 480 с.
2. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. 2-е изд. М.: ГИФМЛ, 1959. 699 с.
3. *Белоножко Д.Ф.* О волновом массопереносе вдоль заряженной жидкой поверхности, обдуваемой диэлектрической средой / Д.Ф. Белоножко, А.А. Очиров // *ЭОМ.* 2016. 52(1). С. 91-97.

УДК 517.5

А. В. Бородин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: alvasborodin@mail.ru

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ О ПОЧЛЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА

Найдено интегральное представление гладкой функции $f \in C^{(n)}(G)$ одной или нескольких переменных через её старшую производную $f^{(n)} \in C(G)$. С его помощью получены новые условия почленного дифференцирования функциональной последовательности (ряда) и новая норма в пространстве $C^{(n)}(G)$.

Ключевые слова: банахово пространство $C^{(n)}(G)$, интегральное представление, норма, функциональная последовательность, почленное дифференцирование.

A. V. Borodin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: alvasborodin@mail.ru

ON A GENERALIZATION OF THE THEOREM ON THE TERM-BY-TERM DIFFERENTIATION OF A FUNCTIONAL SERIAS

We have found an integral representation of a smooth function $f \in C^{(n)}(G)$ of one or several variables in terms of its highest derivative $f^{(n)} \in C(G)$. With its help we have obtain new conditions the terms-by-term differentiation of a functional sequence (series) and a new norm in the space $C^{(n)}(G)$.

Keywords: banach space $C^{(n)}(G)$, integral representation, norm, functional sequence, term-by-term differentiation.

Рассмотрим бесконечную последовательность

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \quad (f_k(x) \in C^{(n)}(I)), \quad (1)$$

n раз непрерывно дифференцируемых на интервале $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ функций $f_k(x)$. Обозначим: через $\bar{I} = [a, b]$, через $D^j f(x) = d^j f(x) / dx^j$ ($x \in I$) производную j -го порядка от функции f во внутренней точке x ; через

$D_+ f(a)$ ($D_- f(b)$) – её правую (левую) производную 1-го порядка на левом (правом) конце интервала I ; через $C^{(1)}(\bar{I})$ – соответствующее пространство; через $s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f_\infty(x)$ – равномерный (или сильный) на множестве I предел функциональной последовательности.

Пусть $x_0 \in I$ фиксированная точка, а $y_0^i \in \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) – заданные числа. Как известно [4, с. 109], если

$$\begin{aligned} 1) \lim_{k \rightarrow \infty} D^i f_k(x_0) &= y_0^i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \\ 2) s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^n f_k(x) &= g(x) \quad (\text{на } I), \end{aligned} \quad (2')$$

то существует функция $f(x) \in C^{(n)}(I)$, для которой

$$s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^i f_k(x) = D^i f(x) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad D^n f(x) = g(x),$$

и, следовательно,

$$D^i \left(s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right) = s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^i f_k(x) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (3')$$

т. е. условия (2') являются достаточными для перестановочности операций кратного дифференцирования и предельного перехода. При этом в случае $n = 1$ интервал $I = (a, b)$ можно заменить на отрезок $\bar{I} = [a, b]$.

На самом деле, указанную замену можно совершить и при $n \geq 2$, а именно.

Замечание 1. При $n \geq 2$ достаточно функции $g(x)$ и $f_k(x)$ с интервала $I = (a, b)$ продолжить на больший интервал $I_\delta = (a - \delta, b + \delta)$ ($\delta > 0$), следующим образом:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(a+0), & x \in (a - \delta, a], \\ g(x), & x \in (a, b), \\ g(b-0), & x \in [b, b + \delta), \end{cases}$$

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^n \frac{D_+^j f_k(a)}{j!} (x-a)^j, & x \in (a - \delta, a], \\ f_k(x), & x \in (a, b), \\ \sum_{j=0}^n \frac{D_-^j f_k(b)}{j!} (x-b)^j, & x \in [b, b + \delta). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что для этих функций на интервале I_δ условия (2') выполняются и, значит, на I_δ и $\bar{I} \subset I_\delta$ имеет место утверждение (3').

Далее рассмотрим несколько иные, чем (2'), условия при которых имеет место утверждение (3').

Пусть $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ и в \bar{I} фиксированы (здесь и далее) n разных точек

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \quad (a \leq x_{i-1} < x_i \leq b). \quad (1_0)$$

Теорема 1. Если функциональная последовательность (1) удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \\ \text{(b)} \quad & s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^n f_k(x) = g(x), \end{aligned} \quad (2)$$

то существует функция $f(x) \in C^{(n)}(I)$, для которой

$$s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^i f_k(x) = D^i f(x) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad D^n f(x) = g(x), \quad (3)$$

и, следовательно,

$$D^i \left(s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right) = s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^i f_k(x) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (3')$$

т. е. условия (2) являются достаточными для перестановочности операций кратного дифференцирования и предельного перехода.

Доказательство. Рассмотрим на $\bar{I} = [a, b]$ простейшее дифференциальное уравнение n -го порядка (ДУ _{n})

$$D^n y(x) = g(x) \quad (g(x) \in C(\bar{I})), \quad (4)$$

где функция $g(x)$ взята из условия (b) теоремы 1. Общее решение этого ДУ _{n} можно представить в форме (см., например, [3])

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} g(t) dt + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d^{(i)}}{i!} (x-a)^i, \quad (5)$$

где $d^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) – произвольные постоянные, определяющие начальные данные Коши в точке a :

$$D^i y(a) = d^{(i)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (6)$$

Теперь с помощью общего решения (5) и новых условий

$$y(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (7)$$

где значения y_i взяты из условия (а) теоремы 1, найдём начальные данные (6). Для этого подставим (7) в (5) и получим относительно (6) следующую систему линейных алгебраических уравнений n -го порядка:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x_i - a)^j}{j!} d^{(j)} = y_i - \frac{1}{(n-1)!} \int_a^{x_i} (x_i - t)^{n-1} g(t) dt \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (8)$$

Матрица этой системы

$$W = \left(\frac{(x_i - a)^j}{j!} \right) \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

– невырожденная, поскольку её определителем (с точностью до постоянного множителя $\prod_{j=0}^{n-1} 1/j!$) является определитель Вандермонда $\prod_{n-1 \geq i > j \geq 0} (x_i - x_j)$, который в силу (1₀) отличен от нуля. Поэтому СЛАУ (8) имеет единственное решение

$$\begin{pmatrix} d^{(0)} \\ d^{(1)} \\ \vdots \\ d^{(n-1)} \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{(n-1)!} W^{-1} \begin{pmatrix} \int_a^{x_0} (x_0 - t)^{n-1} g(t) dt \\ \int_a^{x_1} (x_1 - t)^{n-1} g(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^{x_{n-1}} (x_{n-1} - t)^{n-1} g(t) dt \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где W^{-1} – матрица обратная к W . Подставив найденные по формуле (9) значения d^i в соотношения (5), (6), получим решение задачи (4), (7) (вообще говоря, для любой функции $g(x) \in C(\bar{I})$ в (4) и любых значениях y_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) в (7)).

Из (9) следует, что, если выполнены условия:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{ki} = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (10)$$

$$s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) \stackrel{I}{=} g(x), \quad (11)$$

то последовательность

$$\begin{pmatrix} d_k^{(0)} \\ d_k^{(1)} \\ \vdots \\ d_k^{(n-1)} \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} y_{k0} \\ y_{k1} \\ \vdots \\ y_{kn} \end{pmatrix} - \frac{1}{(n-1)!} W^{-1} \begin{pmatrix} \int_a^{x_0} (x_0 - t)^{n-1} g_k(t) dt \\ \int_a^{x_1} (x_1 - t)^{n-1} g_k(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^{x_{n-1}} (x_{n-1} - t)^{n-1} g_k(t) dt \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (9_k)$$

построенная по формуле (9) и, следовательно, определяющая по формуле (5) решение $y_k(x)$ задачи

$$D^n y(x) = g_k(x) \quad (g_k(x) \in C(\bar{I})), \quad (4_k)$$

$$y(a) = y_{ki} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (7_k)$$

будет сходиться к (9), т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k^i = d^i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (12)$$

Но согласно сказанному, решение задачи (4_k), (7_k) определяется по формуле (5), а именно,

$$y_k(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} g_k(t) dt + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d_k^{(i)}}{i!} (x-a)^i \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (13)$$

Отсюда в силу (11), (12) и предельного перехода под знаком интеграла (см. [1]) следует, что

$$s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) = y(x). \quad (14)$$

Далее, продифференцируем равенства (13) j раз по переменной $x \in [a, b]$. Получим

$$D^j y(x) = \frac{1}{(n-1-j)!} \int_a^x (x-t)^{n-1-j} g(t) dt + \sum_{i=j}^{n-1} \frac{d^{(i)}}{(i-j)!} (x-a)^{i-j}, \quad (15)$$

$$D^j y_k(x) = \frac{1}{(n-1-j)!} \int_a^x (x-t)^{n-1-j} g_k(t) dt + \sum_{i=j}^{n-1} \frac{d_k^{(i)}}{(i-j)!} (x-a)^{i-j} \quad (16)$$

$$(k \in \mathbb{N}), \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Переходя в (16) к пределу (при $k \rightarrow +\infty$) в силу (11), (12) и (15), получим

$$s - \lim_{k \rightarrow \infty} D^j y_k(x) \stackrel{I}{=} D^j y(x) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (17)$$

Если теперь заменить в отношениях (14) и (17) $y_k(x)$ на $f_k(x)$, а $y(x)$ на $f(x)$, то получим отношения (3), (3') теоремы 1. Тем самым, теорема 1 доказана. \square

Отметим ряд следствий из теоремы 1.

Для начала, наряду с функциональной последовательностью (1) рассмотрим на множестве $\bar{I} = [a, b]$ функциональные ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \left(f_k(x) \in C^{(n)}(\bar{I}) \right), \quad (18_0)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} D^j f_k(x) \quad (j = 1, 2, \dots, (n-1)), \quad (18_j)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} D^n f_k(x). \quad (18_n)$$

На языке этих рядов теорема 1 примет следующий вид.

Следствие 1. Если ряд (18₀) сходится в n точках (1_0) , т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_i) = s_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

а ряд (18_n) равномерно сходится на $\bar{I} = [a, b]$ к функции $S^{(n)}(x)$, т. е.

$$s - \sum_{k=1}^{\infty} D^n f_k(x) = S^{(n)}(x),$$

то существует функция $S^{(0)}(x) \in C^{(n)}(\bar{I})$ такая, что, во-первых, ряды (18_j) равномерно сходятся к $D^j S^{(0)}(x)$, т. е.

$$s - \sum_{k=1}^{\infty} D^j f_k(x) = D^j S^{(0)}(x) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1),$$

во-вторых,

$$D^n S^{(0)}(x) = S^{(n)}(x).$$

Далее, как известно (см., например, [4, 7, 8]), в пространстве $C^{(n)}(\bar{I})$ n раз непрерывно дифференцируемых на множестве $\bar{I} = [a, b]$ функций f можно определить эквивалентные нормы:

$$\|f\|_1 = \max_{0 \leq k \leq n} \|D^k f\|_C, \quad \|f\|_2 = \sum_{k=0}^n \|D^k f\|_C,$$

$$\|f\|_3 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{ |D^k f(a)|; \|D^n f\|_C \} \quad (19')$$

где $\|f\|_C = \sup_{x \in \bar{I}} |f(x)|$, относительно которых пространство $C^{(n)}(\bar{I})$ будет банаховым, а сходимость по всем производным до n -го порядка включительно – равномерной на $\bar{I} = [a, b]$.

Теорема 1 позволяет расширить этот перечень норм ещё одной, а именно:

$$\|f\|_0 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{ |f(x_k)|; \|D^n f\|_C \}, \quad (19)$$

где $x_k \in \bar{I}$ – точки (1₀). Согласно этой теореме сходимость по норме (19) функциональной последовательности (1) к функции $f(x)$ ($x \in \bar{I}$), т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_0 = 0, \quad (20)$$

равносильно равномерной сходимости всех её производных (до n -го порядка включительно) к производной соответствующего порядка от функции f , т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D^j f - D^j f_k\|_C = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n),$$

или

$$s - \sum_{k=1}^{\infty} D^j f_k(x) = f^j(x) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n).$$

В связи со сказанным заметим, что среди норм (19') и (19) последняя норма (19) самая простая. С её помощью можно получить следующие небезынтересные утверждения.

Следствие 2. Для того чтобы последовательность полиномов $\{P_{nk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ степени n равномерно сходилась к полиному $P_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{nk}(x_i) = P_n(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

где $x_i \in \mathbb{R}$ – произвольные, но разные фиксированные точки.

В самом деле, для полиномов $P_{nk}(x)$ выполняется условие $D^{n+1}P_{nk}(x) = 0$. Поэтому для них норма (19) принимает вид

$$\|f\|_0 = \max_{0 \leq k \leq n} \{|f(x_k)|\}, \quad (19_0)$$

а условие сходимости (20) по этой норме – соответственно вид

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_i) - f_k(x_i)| = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (20_0)$$

Следствие 3. Если полином $P_n(x)$ степени n обращается в нуль в $(n+1)$ -й разной точке $x_i \in \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), то $P_n(x) = 0$.

Это следует из очевидного равенства $\|P_n\|_0 = \max_{0 \leq k \leq n} \{|P_n(x_k)|\} = 0$.

В связи с этим

Следствие 4. Подмножество $C_0^n(\bar{I}) \subset C^{(n)}(\bar{I})$ функций f банахова пространства $C^{(n)}(\bar{I})$, удовлетворяющих условию

$$f(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (21)$$

где $x_i \in \bar{I}$ – точки (1_0) , является банаховым подпространством с нормой (см. (19))

$$\|f\|^0 = \|D^n f\|_C = \sup_{x \in \bar{I}} |D^n f(x)| = \|f\|_0. \quad (22)$$

Заметим, что при любой из перечисленных выше нормировок пространство $C^{(n)}(\bar{I})$, будучи полной нормированной алгеброй, не будет банаховой алгеброй [6] (относительно поточечного умножения функций). Тому причина – невыполнение условия

$$\|f g\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha \|g\|_\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

В то же время, если функция $\varphi(x) \in C_0^n(\bar{I})$, то ввиду (21) для любой функции $f(x) \in C^{(n)}(\bar{I})$ функция $\varphi(x)f(x) \in C_0^n(\bar{I})$ и её норма определяется по формуле (22), т. е.

$$\|\varphi(x)f(x)\|^0 = \sup_{x \in \bar{I}} |D^n(\varphi(x)f(x))|,$$

и потому банахово подпространство $C_0^n(\bar{I})$ является собственным идеалом [6] в банаховом пространстве $C^{(n)}(\bar{I})$ с нормой (19).

Рассмотрим теперь линейные дифференциальные операторы n -го порядка (ЛДО $_n$)

$$L_{kn}(y) = a_{k0}(x)D^n y(x) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{kj}(x)D^j y(x) + a_{kn}(x)y(x) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

где $a_{kj}(x) \in C(\bar{I})$ ($j = 0, 1, \dots, n$); соответствующие ДУ $_n$

$$L_{kn}(y) = f_k(x) \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (23)$$

где $f_k(x) \in C(\bar{I})$, и дополнительные условия

$$y(x_i) = y_{ki} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (24)$$

где $y_{ki} \in \mathbb{R}$, а $x_k \in \bar{I}$ – фиксированные разные точки. Пусть при этом существуют следующие пределы:

$$1) \ s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} a_{kj}(x) = a_j(x), \quad 2) \ s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad 3) \ \lim_{k \rightarrow \infty} y_{ki} = y_i, \quad (25)$$

и

$$L_n(y) = a_0(x)D^n y(x) + \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x)D^j y(x) + a_n(x)y(x)$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Следствие 5. Если $y_k(x) \in C^{(n)}(\bar{I})$ – решение задачи (23), (24) (при условиях (25)) и существует предел

$$s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^n y_k(x) = y^{(n)}(x), \quad (26)$$

то существует функция $y(x) \in C^{(n)}(\bar{I})$ такая, что

$$s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) = y(x), \quad s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^i y_k(x) = D^i y(x) \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

$$D^n y(x) = y^{(n)}(x),$$

$$y(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (27)$$

и, следовательно,

$$s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} L_{kn}(y_k(x)) = L_n\left(s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x)\right) \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

т. е. условия (25), (26) являются достаточными для перестановочности операций L_{kn} и сильного предельного перехода.

Кроме того, указанная функция $y(x) \in C^{(n)}(\bar{I})$ является решением задачи

$$L_n(y) = f(x), \quad y(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

параметры которой определены в (25).

Теперь наряду с функциональной последовательностью (1) рассмотрим барифункциональную последовательность (см. [1, 2])

$$\langle w_k(x) \rangle = \langle u_k(x) : v_k(x) \rangle_{k=1}^{\infty} \quad (u_k(x), v_k(x) \in C^{(n)}(I))$$

n раз непрерывно дифференцируемых на множестве $\bar{I} = [a, b] \subset \mathbb{R}$ бари-функций $\langle w_k(x) \rangle$. На основании формулы Лейбница [8]

$$D^n(u(x)v(x)) = \sum_{i=0}^n C_n^i D^i u(x) D^{n-i} v(x)$$

и теоремы 1 получаем следующий (важный для барианализа) результат.

Следствие 6. Если барифункциональная последовательность (1) удовлетворяет условиям

$$(a) \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x_i) = u_i, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x_i) = v_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$(b) s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^n u_k(x) = g(x) \quad s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^n v_k(x) = h(x),$$

то существует барифункция $\langle w(x) \rangle = \langle u(x) : v(x) \rangle \in C^{(n)}(I)$ такая, что

$$s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^i \langle w_k(x) \rangle = D^i \langle w(x) \rangle \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$D^n \langle w(x) \rangle = \langle g(x); h(x) \rangle,$$

и, следовательно,

$$D^i \left(s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \langle w_k(x) \rangle \right) = s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^i \langle w_k(x) \rangle \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

т. е. имеет место перестановочность операции кратного (бари) дифференцирования и предельного перехода, а следовательно, замкнутость операции дифференцирования.

Обобщим полученные результаты (теорему 1) на случай вещественных функций многих переменных. Для начала и простоты рассмотрим функции $u = u(x_1, x_2)$ двух переменных $x = (x_1, x_2)$, определённые в односвязной выпуклой области $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Рассмотрим в G ДУЧП₂

$$D^2u(x)dx \cdot dx = A(x)dx \cdot dx, \quad (28)$$

где [8]

$$D^2u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} - \text{производная 2-го порядка от функции } u,$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{12}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} - \text{непрерывная в } G \text{ матрица 2-го порядка;}$$

соответственно

$$D^2u(x)dx \cdot dx = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} (x) dx_2^2$$

– дифференциал 2-го порядка,

$$A(x)dx \cdot dx = a_{11}(x) dx_1^2 + 2a_{12}(x) dx_1 dx_2 + a_{22}(x) dx_2^2$$

– квадратичная форма 2-го порядка (точка «·» – скалярное произведение в \mathbb{R}^2).

Понятно, что ДУЧП₂ эквивалентно следующей системе ДУ:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} = a_{11}(x), \quad \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = a_{12}(x), \quad \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} = a_{22}(x). \quad (29)$$

Чтобы эта система имела решение, необходимо (и достаточно), чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2}. \quad (30)$$

Действительно, необходимость этих условий очевидна, покажем их достаточность.

Пусть

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = a_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = a_2(x). \quad (31)$$

Тогда

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1^2} = a_{11}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = a_{12}, \quad (30_1)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2^2} = a_{22}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = a_{12}. \quad (30_2)$$

В силу (30) система (30₁) ((30₂)) разрешима в области G , относительно $a_1(x)$ ($a_2(x)$) и решение даётся формулой (см. [5])

$$a_1(x) = \int_{x^0}^x a_{11}(x) dx_1 + a_{12}(x) dx_2 + a_1(x^0) = A_1(x) + a_1(x^0), \quad (31_1),$$

$$a_2(x) = \int_{x^0}^x a_{12}(x) dx_1 + a_{22}(x) dx_2 + a_a(x^0) = A_2(x) + a_1(x^0), \quad (31_2)$$

$$(x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in G)$$

где

$$A_1(x) = \int_{x^0}^x a_{11}(x) dx_1 + a_{12}(x) dx_2, \quad A_2(x) = \int_{x^0}^x a_{12}(x) dx_1 + a_{22}(x) dx_2 \quad (32)$$

– первообразные функций $a_1(x)$, $a_2(x)$ соответственно (все интегралы – криволинейные интегралы 2-го рода, независящие от пути, соединяющего точки x^0 и x). По тем же причинам система (31) разрешима относительно $u(x)$ посредством формулы

$$u(x) = \int_{x^0}^x a_1(x) dx_1 + a_2(x) dx_2 + u(x^0) \quad (x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in G). \quad (33)$$

Подставляя в (33) результаты (31₁) и (31₂), получим

$$u(x) = \int_{x^0}^x A_1(x) dx_1 + A_2(x) dx_2 + a_1(x^0)(x_1 - x_1^0) + a_2(x^0)(x_2 - x_2^0) + u(x^0). \quad (33_1)$$

Таким образом, условие (30) не только необходимо, но и достаточно для совместности системы (29).

Поскольку все участвующие в полученных формулах криволинейные интегралы 2-го рода не зависят от пути интегрирования, соединяющего точки x^0 и x , то в качестве такого пути возьмём отрезок

$$[x^0, x] = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi = x^0 + \Delta x t, t \in [0, 1]\} \\ (\Delta x = x - x^0 = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0) = (\Delta x_1, \Delta x_2)). \quad (*)$$

Тогда формулы (31₁) и (31₂) (где $t = t_1$) перепишутся следующим образом:

$$a_1(x) = a_1(x^0) + \int_0^1 (a_{11}(x^0 + (x - x^0)t_1)(x_1 - x_1^0) + a_{12}(x^0 + (x - x^0)t_1)(x_2 - x_2^0)) dt_1,$$

$$a_2(x) = a_2(x^0) + \int_0^1 \left(a_{12}(x^0 + (x - x^0)t_1)(x_1 - x_1^0) + a_{22}(x^0 + (x - x^0)t_1)(x_2 - x_2^0) \right) dt_1,$$

а формула (33) (где $t = t_2$) – так

$$u(x) = u(x^0) + \int_0^1 \left(a_1(x^0 + (x - x^0)t_2)(x_1 - x_1^0) + a_2(x^0 + (x - x^0)t_2)(x_2 - x_2^0) \right) dt_2.$$

Отсюда

$$u(x) = u(x^0) + a_1(x^0)\Delta x_1 + a_2(x^0)\Delta x_2 + \int_0^1 t_2 dt_2 \left(\int_0^1 dt_1 \left(\left(a_{11}(x^0 + t_1 t_2 \Delta x) \Delta x_1^2 + 2a_{12}(x^0 + t_1 t_2 \Delta x) \Delta x_1 \Delta x_2 + a_{22}(x^0 + t_1 t_2 \Delta x) \Delta x_2^2 \right) \right) \right)$$

или (с учётом (29), (30), (31))

$$u(x) = (u(x^0) + du(x^0)) + \iint_{K_2} t_1^2 t_2^1 d^2 u(x^0 + t_1 t_2 \Delta x) dt_1 dt_2, \quad (34)$$

где $K_2 = \bar{I}^2 = [0, 1] \times [0, 1]$, $d^2 u(x)$ и $du(x)$ – дифференциалы 2-го и 1-го порядка от функции u в точке x , причём в этих дифференциалах $dx = \Delta x$.

Таким образом, для любой функции $u = u(x_1, x_2)$ (от двух переменных $(x_1, x_2) \in G$) класса $C^{(2)}(G)$ имеет место представление (34). На самом деле справедливо следующее более общее утверждение.

Лемма 1. Любая функция $u = u(x_1, x_2)$ от двух переменных $x = (x_1, x_2) \in G$ класса $C^{(n)}(G)$ (где G – выпуклая область в \mathbb{R}^2), представима в форме

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d^i u(x^0)}{i!} + \int \cdots \int_{K_n} \left(t_1^0 t_2^1 \cdots t_n^{n-1} d^n u(x^0 + \Delta x t_1 t_2 \cdots t_n) \right) dt_1 dt_2 \cdots dt_n, \quad (35)$$

где $K_n = \bar{I}^n$ – компакт-куб размерности n , t_j^{j-1} – степень с основанием t_j и показателем $(j-1)$, $d^i u(x)$ – дифференциалы i -го порядка от функции u в точке x , при этом $dx = \Delta x = x - x^0$.

Доказательство представления (35) подобно доказательству представления (34), но достаточно громоздко, занимает много места, а потому опускается. Более того,

Замечание 2 Представление (35) справедливо и в случае функций $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ от m переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in G$, где G – выпуклая область в m -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^m .

Однако для простоты снова рассмотрим двумерный случай и функции класса $C^{(2)}(G)$ и соответственно представление (34), где в качестве параметров, подлежащих определению, выступают «начальные значения» $u(x^0)$, $a_1(x^0)$, $a_2(x^0)$ в слагаемом

$$u(x^0) + a_1(x^0)(x_1 - x_1^0) + a_2(x^0)(x_2 - x_2^0).$$

Для их определения потребуются значения функции $u = u(x_1, x_2)$ в трёх точках

$$x^i = (x_1^i, x_2^i) \quad (i = 0, 1, 2), \quad (36)$$

не лежащих ни на какой общей прямой в пространстве \mathbb{R}^2 . В этом случае система

$$u(x^0) + a_1(x^0)(x_1^i - x_1^0) + a_2(x^0)(x_2^i - x_2^0) = u(x_1^i, x_2^i) - u^0(x_1^i, x_2^i) \quad (i = 0, 1, 2),$$

где

$$u^0(x_1, x_2) = \iint_{K_2} t_1^2 t_2^1 d^2 u(x^0 + t_1 t_2 \Delta x) dt_1 dt_2,$$

однозначно разрешима относительно

$$u(x^0), \quad \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_1} = a_1(x^0), \quad \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_2} = a_2(x^0),$$

и потому, следуя доказательству теоремы 1, получаем следующий двумерный аналог теоремы 1.

Теорема 2. Если функциональная последовательность

$$\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \quad (u_k(x) \in C^{(2)}(G))$$

удовлетворяет условиям

$$(a) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x^i) = u^i \in \mathbb{R} \quad (i = 0, 1, 2),$$

$$(b) \quad s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^2 u_k(x) = \begin{pmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x) \\ v_{21}(x) & v_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где $x^i = (x_1^i, x_2^i)$ ($i = 0, 1, 2$) – точки, не лежащие ни на одной общей прямой, то существует функция $u(x) \in C^{(2)}(G)$ такая, что

$$s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^i u_k(x) = D^i u(x) \quad (i = 0, 1), \quad D^2 u(x) = \begin{pmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x) \\ v_{21}(x) & v_{22}(x) \end{pmatrix},$$

и, следовательно,

$$D^i \left(s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) \right) = s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} D^i u_k(x) \quad (i = 0, 1, 2),$$

т. е. условия (37) являются достаточными для перестановочности операций кратного дифференцирования и предельного перехода.

Теорема 2 позволяет определить норму в пространстве $C^{(2)}(G)$ следующим образом:

$$\|u\|_0 = \max_{0 \leq i \leq 2} \{ |u(x^i)|; \left\| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} \right\|_C, \left\| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \right\|_C, \left\| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \right\|_C \},$$

где $x^i = (x_1^i, x_2^i)$ ($i = 0, 1, 2$) – точки, не лежащие ни на одной общей прямой.

В силу замечания 2 последние результаты легко переносятся на случай функций от m переменных из класса $C^{(2)}(G)$ с той лишь поправкой, что в условии (37) (а) должно быть $(m + 1)$ точек

$$x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_m^i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m), \quad (38)$$

не лежащих на гиперплоскости в m -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^m , а в условии (37) (б) должна быть функциональная матрица m -го порядка.

Общий случай (35) уже не столь прост (в части условия (38)) и для своего анализа требует отдельной объёмной работы. Поэтому приведём в сжатой форме окончательный результат.

Теорема 3. Если $(\forall n_1, n_2 : n_1 + n_2 = n)$

$$s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial^n u_k(x_1, x_2)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} = \frac{\partial^n u(x_1, x_2)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}}$$

и функциональная последовательность

$$\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \quad (u_k(x) \in C^{(n)}(G))$$

сходится в $n(n+1)/2$ точках, не лежащих ни на какой алгебраической кривой $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ $(n-1)$ -го порядка, то

$$(\forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}) \quad (\forall j_1, j_2 : j_1 + j_2 = j),$$

$$s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial^j u_k(x_1, x_2)}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}} = \frac{\partial^j u(x_1, x_2)}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}}.$$

Отсюда нетрудно получить утверждения, аналогичные следствиям 1–6 из теоремы 1.

В дальнейшем полученные результаты предполагается рассмотреть с позиций барианализа [1, 2], а значит, приложения к линейным и нелинейным ДУ в частных производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бородин А.В.* Многомерный барианализ и его приложения. Ч. I. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2005. 432 с.
2. *Бородин А.В.* Частично квазисвязные множества и барианализ (приложения). Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2013. 484 с.
3. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 394 с.
4. *Камынин Л.И.* Курс математического анализа. Т. II. М.: Изд-во МГУ, 1995. 624 с.
5. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966. 260 с.
6. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: МИР, 1975. 443 с.
7. *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2014. 560 с.
8. *Шварц Л.* Анализ. Т. I. М.: МИР, 1972. 824 с.

УДК 514.76

А. В. Букушева

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, г. Саратов, *e-mail: bukusheva@list.ru*

ПРОДОЛЖЕНИЕ РИМАНОВОЙ МЕТРИКИ В РАССЛОЕНИЕ ДОПУСТИМЫХ 2-ФОРМ СУБРИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

Рассматривается субриманово многообразии контактного типа. С помощью внутренней связности субриманова многообразия на пространстве расслоения допустимых 2-форм определяется структура риманова многообразия. Доказывается, что заданная таким образом структура образует структуру субриманова многообразия.

Ключевые слова: субриманово многообразии, внутренняя связность, расслоение допустимых 2-форм.

A. V. Bukusheva

G.N. Chernyshevsky National Research Saratov State University
Russia, Saratov, e-mail: bukusheva@list.ru

THE EXTENSION OF RIEMANNIAN METRIC TO BUNDLE OF ADMISSIBLE 2-FORMS OF SUB-RIEMANNIAN MANIFOLD

We consider sub-Riemannian manifold of contact type. Using interior connection of sub-Riemannian manifold, the structure of Riemannian manifold is defined on the space of bundle admissible 2-forms. It is proved that such structure forms the structure of sub-Riemannian manifold.

Keywords: Sub-Riemannian manifold, interior connection, bundle of admissible 2-forms.

1. Введение. Пусть M - гладкое многообразие размерности n с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D, D^\perp)$ контактного типа. Векторное поле $\vec{\xi}$ порождает оснащение D^\perp распределения D . Наличие оснащения D^\perp позволяет определить на многообразии M расслоение (D_2, π, M) допустимых 2-форм. Допустимая 2-форма по определению обращается в нуль каждый раз, когда среди ее аргументов встречается вектор оснащения D^\perp . В предлагаемой статье впервые рассматривается расслоение (D_2, π, M) , на пространстве которого с помощью внутренней связности определяется структура риманова многообразия. Настоящая статья является обобщением работы [7], в которой исследовалась почти контактная метрическая структура, естественным образом возникающая на \mathcal{D} -распределении почти контактного метрического многообразия.

2. Внутренняя связность на субримановом многообразии контактного типа. Под субримановым многообразием контактного типа будем понимать гладкое многообразие M с заданной на нем структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D, D^\perp)$, где $\vec{\xi}$ и η – вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g – риманова метрика, относительно которой гладкое распределение $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$ ортогонально распределению $D = \ker \eta$. Распределение D^\perp называется оснащением распределения D . Имеют место равенства $TM = D \oplus D^\perp$ и $g(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \eta(\vec{\xi}) = 1$.

Тензорное поле t типа (p, q) , заданное на субримановом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η .

Карту $k(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n-1$) многообразия M , по аналогии с почти контактным метрическим многообразием, будем называть адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \vec{\xi}$ [1-5]. Пусть $P: TM \rightarrow D$ - проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $k(x^\alpha)$ - адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение $D: D = Span(\vec{e}_a)$.

Внутренней линейной связностью ∇ [6-9] на субримановом многообразии назовем отображение

$$\nabla: \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1 \vec{x} + f_2 \vec{y}} = f_1 \nabla_{\vec{x}} + f_2 \nabla_{\vec{y}}$,
- 2) $\nabla_{\vec{x}} f \vec{y} = (x.f) \vec{y} + f \nabla_{\vec{x}} \vec{y}$,
- 3) $\nabla_{\vec{x}} (\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} + \nabla_{\vec{x}} \vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей.

Кручение S и кривизна R внутренней линейной связности по определению полагаются равными

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} - \nabla_{\vec{y}} \vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}],$$

$$R(\vec{x}, \vec{y}) \vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = I - P$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$. В адаптированных координатах имеем

$$S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c.$$

Внутреннее дифференцирование может быть применено к допустимым тензорным полям произвольного типа. Внутреннюю связность назовем метрической, если $\nabla g = 0$. Обычным образом доказывается следующее

Предложение 1. *На субримановом многообразии существует единственная метрическая связность ∇ с нулевым кручением.*

Коэффициенты связности ∇ находятся по формулам

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

3. Расслоение допустимых 2-форм субриманова многообразия. Пусть M - субриманово многообразиие контактного типа. Рассмотрим расслоение (D_2, π, M) допустимых 2-форм. Имеет место

Предложение 2. *Пространство D_2 расслоения (D_2, π, M) является гладким многообразием размерности $n + (n-1)^2$.*

Всякой адаптированной карте $k(x^\alpha)$ многообразия M соответствует адаптированная карта $\tilde{k}(x^\alpha, p_{ab})$ многообразия D_2 , где $p_{ab} = p(\vec{e}_a, \vec{e}_b)$, $p \in D_2$.

Предложение 3. *Векторные поля*

$$\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n + (p_{dc} \Gamma_{ab}^d + p_{bd} \Gamma_{ac}^d) \partial^{bc}, \quad \partial^{bc} = \frac{\partial}{\partial p_{bc}}$$

порождают распределение $\tilde{D} = H \oplus V$, где $H = \text{Span}(\vec{e}_a)$, $V = \text{Span}(\partial^{ab})$.

Добавляя к векторным полям \vec{e}_a и ∂^{ab} поле ∂_n , получаем адаптированное поле базисов на многообразии D_2 .

Определим на многообразии D_2 метрический тензор G , полагая $G(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = g_{ab}$, $G(\partial_n, \partial_n) = 1$, $G(\vec{e}_a, \partial^{bc}) = G(\vec{e}_a, \partial_n) = G(\partial^{ab}, \partial_n) = 0$, $G^{ab, cd} = g^{ac} \delta^{bd}$.

При определении тензора G мы опирались на результаты работы [10], специализируя их для нашего случая.

Имеет место

Теорема. *Распределение D_2 с заданным на нем метрическим тензором G несет на себе структуру субриманова многообразия контактного типа.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Букушева А.В. О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой / А.В. Букушева, И.П. Иванченко С.В. Галаев // Механика. Математика. 2011. №13. С.10-14.
2. Букушева А.В. О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Математика. Механика. 2005. №7. С. 12-14.
3. Букушева А.В. О некоторых классах почти параконтактных метрических многообразий // Механика. Математика. 2013. №15. С.8-11.
4. Букушева А.В. О некоторых классах распределений с финслеровой структурой // Математика. Механика. 2012. №.14. С. 13-16.

5. Букушева А.В. Когомологии оснащенных распределений // Математика. Механика. 2014. №.16. С.15-18.
6. Букушева А.В. Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т.14, №.3. С.247-251.
7. Галаев С.В. Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий /С.В. Галаев // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 138-147.
8. Галаев С.В. Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой // Сибирский мат. журн. 2016. Т. 57, № 3.С. 632-640.
9. Галаев С.В. Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2015. Т. 15, вып. 3. С.258-264.
10. Салимов А.А. Поднятие римановых метрик на тензорные расслоения / Н. Ченгиз, А.А Салимов // Изв. вузов. Математика 2003. №11. С. 51-59.

УДК 514.76

С. В. Галаев

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, г. Саратов, e-mail: sgalaev@mail.ru

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРОДОЛЖЕННОЙ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ СТРУКТУРЫ С БИ-МЕТРИКОЙ

На распределении D почти контактного метрического многообразия M как на тотальном пространстве векторного расслоения определяется почти контактная структура с Би-метрикой. Доказывается, что многообразие D с заданной таким образом структурой является косимплектическим Би-метрическим многообразием тогда и только тогда, когда многообразие M есть косимплектическое многообразие с распределением D нулевой кривизны, для которого $\vec{\xi}$ - киллингово векторное поле.

Ключевые слова: косимплектическое многообразие, почти контактная структура с Би-метрикой, распределение нулевой кривизны.

S. V. Galaev

G.N. Chernyshevsky National Research Saratov State University
Russia, Saratov, e-mail: sgalaev@mail.ru

ABOUT ONE CLASS OF AN EXTENDED ALMOST CONTACT STRUCTURE WITH B-METRIC

On the distribution D of an almost contact metric manifold M , as on the total space of a vector bundle, an almost contact structure with a B -metric is defined. It is proved that manifold D with a structure thus defined is a cosymplectic B -metric manifold if and only if the manifold M is a cosymplectic manifold with zero-curvature distribution D for which $\vec{\xi}$ is the Killing vector field.

Keywords: *cosymplectic manifold, almost contact structure with B -metric, zero-curvature distribution.*

1. Введение. Почти контактные многообразия с Би-метрикой исследовались в работах [1-3]. В работе [3] предложена классификация таких многообразий в соответствии со свойствами специально определенного для этой цели тензора типа $(0, 3)$. Многообразия, входящие во все 11 классов классификации называются косимплектическими Би-метрическими многообразиями. В настоящей работе на распределении D почти контактного метрического многообразия M как на тотальном пространстве векторного расслоения (D, π, M) определяется почти контактная структура с Би-метрикой, называемая продолженной структурой. Находятся выражения для коэффициентов соответствующей связности Леви-Чивита, что позволяет выразить значения тензора F через значения геометрических инвариантов исходного многообразия M . Основным результатом работы является теорема, утверждающая, что продолженная структура определяет на многообразии D структуру косимплектического Би-метрического многообразия тогда и только тогда, когда многообразие M является косимплектическим многообразием с распределением D нулевой кривизны и киллинговым векторным полем $\vec{\xi}$.

2. Почти контактная структура с B -метрикой. Пусть M – гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, $m \geq 1$, с заданной на нем почти контактной структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$, где φ - тензор типа $(1,1)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η - вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой такие, что

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}, \quad \eta(\vec{\xi}) = 1. \quad (1)$$

Мы требуем, чтобы $\vec{\xi} \in \ker \omega$, где $\omega = d\eta$. Почти контактная структура называется контактной, если $\text{rk} \omega = 2m$. Многообразие, наделенное (почти) контактной структурой, будем называть (почти) контактным многообразием. Гладкое распределение $D = \ker \eta$ называется распределением почти контактной структуры. Эндоморфизм φ в работе будет называться допустимой почти комплексной структурой.

Если почти контактная структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ согласована с псевдоримановой метрикой g таким образом, что

$$g(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}) = -g(\vec{x}, \vec{y}) + \eta(\vec{x})\eta(\vec{y}), \quad (2)$$

где $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(TM)$, $\Gamma(TM)$ - модуль векторных полей на многообразии M , то структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ называется почти контактной структурой с Би-метрикой, а многообразие M - почти контактным многообразием с Би-метрикой. Из (1), (2) следует, что

$$\varphi\vec{\xi} = \vec{0}, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \eta(\vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{\xi}), \quad g(\varphi\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y}).$$

Тензорное поле $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = g((\nabla_{\vec{x}}\varphi)\vec{y}, \vec{z})$, где ∇ - связность Леви-Чивита, введено и названо в работе [3] фундаментальным тензорным полем. В зависимости от строения поля F выделяются 11 классов почти контактных структур с Би-метрикой. Структуры, для которых выполняется условие $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = 0$, принадлежат каждому из одиннадцати классов и определяют класс косимплектических Би-метрических многообразий.

Карту $k(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n-1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \vec{\xi}$ [4]. Пусть $P: TM \rightarrow D$ - проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $k(x^\alpha)$ - адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение $D: D = \text{Span}(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_a) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^\alpha, \eta = \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^\alpha)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой. Имеет место равенство $\partial_n \Gamma_a^n = 0$.

Пусть $k(x^\alpha)$ и $k'(x^{a'})$ - адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования:

$$x^a = x^a(x^{a'}), \quad x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'}).$$

Тензорное поле t типа (p, q) , заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$

или η . Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид

$$t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}.$$

3. Продолженные почти контактные структуры с Би-метрикой.

Пусть M – гладкое многообразие с заданной на нем почти контактной структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ с Би-метрикой g .

Распределение D является гладким многообразием размерности $4m+1$ [4, 5]. Пусть, далее, $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$ – коэффициенты внутренней связности ∇ [4, 5].

Внутренней линейной связностью ∇ на многообразии с почти контактной метрической структурой называется отображение

$$\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1 \vec{x} + f_2 \vec{y}} = f_1 \nabla_{\vec{x}} + f_2 \nabla_{\vec{y}},$
- 2) $\nabla_{\vec{x}} f \vec{y} = (x f) \vec{y} + f \nabla_{\vec{x}} \vec{y},$
- 3) $\nabla_{\vec{x}} (\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} + \nabla_{\vec{x}} \vec{z},$

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей. (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

Внутренняя связность определяет дифференцирование допустимых тензорных полей. Так, например, для допустимой почти комплексной структуры выполняется равенство $(\nabla_{\vec{x}} \varphi) \vec{y} = \nabla_{\vec{x}} (\varphi \vec{y}) - \varphi (\nabla_{\vec{x}} \vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A_a^{a'} \vec{e}_{a'}$, где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности: $\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_c^c \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_c^c \vec{e}_a A_b^{c'}$.

Кручением внутренней связности назовем допустимое тензорное поле

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} - \nabla_{\vec{y}} \vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}], \quad \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D).$$

Внутреннюю связность будем называть симметричной, если ее кручение равно нулю. В случае симметричности внутренней связности в адаптированных координатах получаем

$$S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c = 0, \text{ или, } \Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c.$$

Векторные поля

$$(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}) = (A_i) \quad (i, j, k = 1, \dots, 4m+1)$$

определяют на D неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы

$$(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b)$$

- соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n + x^{n+a} R_{bad}^c \partial_{n+c}, [\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+a} \partial_n \Gamma_{ad}^c \partial_{n+c}, [\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c},$$

где R_{bad}^c – компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах [6-11].

Тензор Схоутена является допустимым тензорным полем и определяется равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = I - P$. Тензор Схоутена будем называть тензором кривизны внутренней связности. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид

$$R_{abc}^d = 2\tilde{e}_{[a}^d \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e]}^d \Gamma_{b]c}^e.$$

Имеет место

Предложение 1 [6]. Пусть ∇ - внутренняя связность с тензором кривизны Схоутена $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$. Тогда, для всех $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$ и $\vec{p} \in D$ имеют место следующие равенства.

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{y}]^h - \{R(\vec{x}, \vec{y})\vec{p}\}^v, \quad (3)$$

$$[\vec{x}^h, \vec{\xi}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{\xi}]^h + \{P(\vec{x}, \vec{p})\}^v, \quad (4)$$

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^v] = (\nabla_{\vec{x}} \vec{y})^v, \quad (5)$$

$$[\vec{x}^v, \vec{\xi}^h] = [\vec{x}, \vec{\xi}]^v. \quad (6)$$

Определим на многообразии D почти контактную структуру $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, полагая $J\vec{x}^h = \vec{x}^v$, $J\vec{x}^v = \vec{x}^h$. Определим, далее, на многообразии M метрику \tilde{g} , подчиняющуюся равенствам:

$$\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = -\tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = g(\vec{x}, \vec{y}) \quad \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{u}) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{u}) = 0.$$

Имеют место следующие предложения.

Предложение 2. Структура $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ является почти контактной структурой с Би-метрикой.

Доказательство. В соответствии с определением тензоров J и \tilde{g} получаем:

$$1) \tilde{g}(J\vec{x}^h, J\vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = -g(\vec{x}, \vec{y}) = -\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h);$$

$$2) \tilde{g}(J\vec{x}^v, J\vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = g(\vec{x}, \vec{y}) = -\tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v).$$

Предложение 3. Пусть $\tilde{\nabla}$ - связность Леви-Чивита, тогда выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{x}^h} \vec{y}^h &= (\nabla_{\vec{x}^h} \vec{y})^h - \frac{1}{2}(R(\vec{x}, \vec{y})\vec{p})^v + (\omega(\vec{y}, \vec{x}) - C(\vec{x}, \vec{y}))\vec{\xi}^h, \\ \nabla_{\vec{x}^v} \vec{y}^v &= (L_{\vec{z}^h} g)(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi}^h. \end{aligned}$$

Доказательство предложения 3 основано на использовании равенств (3) - (6), а также выражения для коэффициентов связности:

$$2\Gamma_{ij}^m = g^{km}(A_i g_{jk} + A_j g_{ik} - A_k g_{ij} + \Omega_{kj}^i g_{ii} + \Omega_{ki}^j g_{ij}) + \Omega_{ij}^m,$$

где $\Omega_{ab}^n = 2\omega_{ba}^n$, $\Omega_{ab}^{n+c} = R_{ab}^{n+c}$, $\Omega_{a,n+b}^c = \Gamma_{ab}^c$, $\Omega_{an}^{n+c} = \partial_n \Gamma_{ab}^c x^{n+b}$.

Теорема. Многообразие D со структурой $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ является косимплектическим Би-метрическим многообразием тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) M - косимплектическое многообразие;
- 2) Распределение D многообразия M имеет нулевую кривизну;
- 3) $\vec{\xi}$ - киллингово векторное поле на многообразии M .

Доказательство. Второе условие означает обращение в нуль тензора Схоутена. Найдем условия, при которых выполняется равенство $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = 0$, где $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TD)$. Имеем

$$\begin{aligned} 1) F(\vec{x}^h, \vec{y}^h, \vec{z}^h) &= \tilde{g}((\nabla_{\vec{x}^h} J)\vec{y}^h, \vec{z}^h) = \tilde{g}(\nabla_{\vec{x}^h} J\vec{y}^h - J\nabla_{\vec{x}^h} \vec{y}^h, \vec{z}^h) = \\ &= \tilde{g}(\nabla_{\vec{x}^h} \vec{y}^v - J\nabla_{\vec{x}^h} \vec{y}^h, \vec{z}^h) = -\frac{1}{2}\tilde{g}(R(\vec{p}, \vec{y})\vec{x})^h, \vec{z}^h) = \frac{1}{2}g(R(\vec{p}, \vec{y})\vec{x}, \vec{z}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) F(\vec{x}^v, \vec{y}^h, \vec{\xi}^h) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\vec{x}^v} J\vec{y}^h - J\tilde{\nabla}_{\vec{x}^v} \vec{y}^h, \vec{\xi}^h) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\vec{x}^h} \vec{y}^v, \vec{\xi}^h) = \\ &= -g((L_{\vec{z}^h} g)(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi}, \vec{\xi}) = -(L_{\vec{z}^h} g)(\vec{x}, \vec{y}). \end{aligned}$$

Здесь $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$.

Из этих равенств получаем утверждения теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Manev M. Tangent bundles with Sasaki metric and almost hypercomplex pseudo-Hermitian structure // Topics in almost Hermitian geometry and related fields. World Sci. Publ., Hackensack, NJ. 2005. pp. 170-185.
2. Manev M. Tangent bundles with complete lift of the base metric and almost hypercomplex Hermitian-Norden structure // C. R. Acad. Bulgare Sci. 2014. no. 3. P. 313-322.
3. Ganchev G. Almost contact manifolds with B-metric / G. Ganchev, V. Mihova, K. Gribachev // Math. Balk. N.S. 1993. 7(3-4). P. 261-276.

4. *Галаев С.В.* Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для слущая многообразия с контактной метрической структурой // Сибирский мат. журн.. 2016. Т.57, №3. С. 632-640.
5. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С.258-264.
6. *Галаев С.В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов.сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 263-272.
7. *Галаев С.В.* Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, №3. С. 53-63.
8. *Галаев С.В.* N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Математика. 2017. №3. С. 1-10.
9. *Букушева А.В.* О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Математика. Механика. 2005. №7. С. 12-14.
10. *Галаев С.В.* Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 138-147.
11. *Букушева А.В.* О геометрии контактных метрических пространств с фсвязностью // Научные ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. №17(214). Вып. 40. С. 20-24.

УДК 511.176

Т. П. Гой

Прикарпатский национальный университет им. Василия Стефаника
Украина, г. Ивано-Франковск, *e-mail: tarasgoy@yahoo.com*

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ДИКСОНА

Изучены семейства определителей матриц Теплица-Хессенберга, элементами которых являются многочлены Диксона первого и второго рода. Как следствие, получены новые формулы с мультиномиальными коэффициентами для многочленов Диксона.

Ключевые слова: матрица Теплица-Хессенберга, многочлен Диксона, мультиномиальный коэффициент.

T.P. Goy

*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
Ukraine, Ivano-Frankivsk, e-mail: tarasgoy@yahoo.com*

ON SOME FORMULAS FOR DICKSON POLYNOMIALS

We study some families of Toeplitz-Hessenberg determinants the entries of which are Dickson polynomials of the first and second kinds. This leads us to discover new identities for Dickson polynomials with multinomial coefficients.

Keywords: Toeplitz-Hessenberg matrix, Dickson polynomial, multinomial coefficient.

Многочлены Диксона и некоторые их свойства. Многочлены Диксона первого рода $D_n(x, \alpha)$ определяются с помощью формул [1, 2]

$$D_0(x, \alpha) = 2, \quad D_n(x, \alpha) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} (-\alpha)^i x^{n-2i},$$

где $n \geq 1$, $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ – биномиальный коэффициент; $\lfloor s \rfloor$ – наибольшее целое число, не превышающее s .

Первые несколько многочленов Диксона первого рода имеют вид:

$$D_0(x, \alpha) = 2, \quad D_1(x, \alpha) = x, \quad D_2(x, \alpha) = x^2 - 2\alpha, \quad D_3(x, \alpha) = x^3 - 3\alpha x, \\ D_4(x, \alpha) = x^4 - 4\alpha x^2 + 2\alpha^2, \quad D_5(x, \alpha) = x^5 - 5\alpha x^3 + 5\alpha^2 x.$$

Многочлены $D_n(x, \alpha)$ также могут быть заданы с помощью рекуррентного соотношения второго порядка

$$D_n(x, \alpha) = xD_{n-1}(x, \alpha) - \alpha D_{n-2}(x, \alpha), \quad n \geq 2, \quad (1)$$

с начальными условиями $D_0(x, \alpha) = 2$ и $D_1(x, \alpha) = x$.

Многочлены Диксона второго рода $E_n(x, \alpha)$ определяются с помощью формулы [1, 2]

$$E_n(x, \alpha) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} (-\alpha)^i x^{n-2i}, \quad n \geq 0.$$

Первые несколько многочленов Диксона второго рода имеют вид:

$$E_0(x, \alpha) = 1, \quad E_1(x, \alpha) = x, \quad E_2(x, \alpha) = x^2 - \alpha, \quad E_3(x, \alpha) = x^3 - 2\alpha x, \\ E_4(x, \alpha) = x^4 - 3\alpha x^2 + \alpha^2, \quad E_5(x, \alpha) = x^5 - 4\alpha x^3 + 3\alpha^2 x.$$

Эти многочлены также могут быть заданы с помощью рекуррентного соотношения

$$E_n(x, \alpha) = xE_{n-1}(x, \alpha) - \alpha E_{n-2}(x, \alpha), \quad n \geq 2,$$

где $E_0(x, \alpha) = 1$, $E_1(x, \alpha) = x$.

Многочлены Диксона обладают интересными алгебраическими и теоретико-числовыми свойствами [1, 2]. Например, многочлены $D_n(x, \alpha)$ удовлетворяют правилу композиции

$$D_{mn}(x, \alpha) = D_m(D_n(x, \alpha), \alpha^n).$$

Кроме того, $D_n(x, \alpha)$ – единственные многочлены, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$D_n(u + \alpha/u, \alpha) = u^n + (\alpha/u)^n, \quad u \neq 0.$$

Многочлены $E_n(x, \alpha)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$E_n(u + \alpha/u, \alpha) = \frac{u^{n+1} - (\alpha/u)^{n+1}}{u - \alpha/u},$$

где $u \neq 0$ и $u^2 \neq \alpha$.

Многочлены Диксона связаны с многочленами Чебышева первого рода $T_n(x)$ и многочленами Чебышева второго рода $U_n(x)$ с помощью формул

$$D_n(2x, 1) = 2T_n(x), \quad E_n(2x, 1) = U_n(x).$$

Многочлены Диксона находят широкое применение в алгебре, криптологии, комбинаторике [3–10].

Определители матриц Тейлица-Хессенберга специального вида. Нижней матрицей Тейлица-Хессенберга n -го порядка называется матрица вида

$$A_n \equiv A_n(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_k \neq 0$ хотя бы для одного $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Определитель матрицы Тейлица-Хессенберга можно найти, используя рекуррентную формулу [11]

$$\det A_n = \sum_{i=1}^n (-a_0)^{i-1} a_i \det A_{n-i}, \quad (2)$$

где, по определению, $\det A_0 = 1$.

По формуле Труды определитель матрицы Тейлица-Хессенберга можно выразить через ее элементы [12], а именно

$$\det A_n = \sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n} (-a_0)^{n-(s_1 + \dots + s_n)} \frac{(s_1 + \dots + s_n)!}{s_1! \dots s_n!} a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_n^{s_n}, \quad (3)$$

где суммирование производится по всем целым неотрицательным числам s_i таким, что $s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n$

Для удобства далее будем обозначать

$$\det(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n) \equiv \det(A_n(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n)).$$

Рассмотрим некоторые последовательности матриц Тейлора-Хессенберга $\{A_n\}_{n \geq 1}$, элементами которых являются многочлены Диксона первого рода.

Теорема 1. Пусть $D_m \equiv D_m(x, \alpha)$ – многочлены Диксона первого рода. Тогда

$$\begin{aligned} \det(1; D_1, D_2, \dots, D_n) &= \begin{cases} 2\alpha^m, & \text{если } n = 2m, \\ \alpha^{m-1}x, & \text{если } n = 2m-1, \end{cases} \quad n \geq 1, \\ \det(1; D_2, D_4, \dots, D_{2n}) &= \begin{cases} 2\alpha^n, & \text{если } n = 2m, \\ (x^2 - 2\alpha)\alpha^{n-1}, & \text{если } n = 2m-1, \end{cases} \quad n \geq 1, \\ \det(D_1; D_2, D_3, \dots, D_{n+1}) &= (-\alpha)^{n-1} 2^{n-2} (x^2 - 4\alpha), \quad n \geq 2, \\ \det(D_1; D_3, D_5, \dots, D_{2n+1}) &= (-\alpha)^{n-1} x^n (x^2 - 4\alpha), \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Мы докажем только формулу (4). Доказательства остальных формул этой теоремы аналогичны. Используем метод математической индукции по n . Для $n = 2$ и $n = 3$ формула (4), очевидно, выполняется. Предположим, что она справедлива для всех $n-1$ и докажем ее справедливость при $n \geq 3$.

Пусть

$$P_n = \det(D_1; D_2, D_3, \dots, D_{n+1}).$$

Из (4), используя (2), получаем разложение

$$P_n = \sum_{i=1}^n (-x)^{i-1} D_{i+1} P_{n-i}. \quad (5)$$

Теперь из (5), учитывая рекуррентное соотношение (1), имеем:

$$\begin{aligned} P_n &= D_2 P_{n-1} + \sum_{i=2}^n (-x)^{i-1} (xD_i - \alpha D_{i-1}) P_{n-i} = \\ &= (x^2 - 2\alpha) P_{n-1} + x \sum_{i=2}^n (-x)^{i-1} D_i P_{n-i} - \alpha \sum_{i=2}^n (-x)^{i-1} D_{i-1} P_{n-i} = \\ &= (x^2 - 2\alpha) P_{n-1} + x \sum_{i=1}^{n-1} (-x)^i D_{i+1} P_{n-i-1} - \alpha \sum_{i=0}^{n-2} (-x)^{i+1} D_{i+1} P_{n-i-2} = \\ &= (x^2 - 2\alpha) P_{n-1} - x^2 \sum_{i=1}^{n-1} (-x)^{i-1} D_{i+1} P_{n-i-1} - \alpha \left(-xD_1 P_{n-2} x^2 \sum_{i=1}^{n-2} (-x)^{i-1} D_{i+1} P_{n-i-2} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2 - 2\alpha)P_{n-1} - x^2P_{n-1} + \alpha x^2P_{n-2} - \alpha x^2P_{n-2} = -2\alpha P_{n-1} = \\
 &= -2\alpha(-\alpha)^{n-2} 2^{n-3}(x^2 - 4\alpha) = (-\alpha)^{n-1} 2^{n-2}(x^2 - 4\alpha).
 \end{aligned}$$

Таким образом, формула (4) справедлива для n . Теорема доказана.

Аналогично рассмотрим четыре семейства определителей матриц Хессенберга-Теплица, элементами которых являются многочлены Диксона второго рода.

Теорема 2. Пусть $E_m \equiv E_m(x, \alpha)$ – многочлены Диксона второго рода. Тогда для всех $n \geq 2$ имеют место тождества

$$\begin{aligned}
 \det(1; E_1, E_2, \dots, E_n) &= \alpha \delta_{n2}, \\
 \det(1; E_2, E_4, \dots, E_{2n}) &= \alpha^{n-1} x^2, \\
 \det(E_1; E_2, E_3, \dots, E_{n+1}) &= (-\alpha)^n, \\
 \det(E_1; E_3, E_5, \dots, E_{2n+1}) &= \alpha^2 x^2 \delta_{n2},
 \end{aligned}$$

где δ_{n2} – символ Кронекера.

Доказательство формул теоремы производится с помощью математической индукции по n , аналогично доказательству формулы (4).

Основной результат. Используя теперь формулу Труди (3), как следствие формул теорем 1 и 2, после несложных преобразований получаем следующие формулы, выражающие суммы произведений многочленов Диксона первого и второго рода с мультиномиальными коэффициентами.

Теорема 3. Пусть $n \geq 1$, кроме указанных случаев. Тогда

$$\begin{aligned}
 \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} p_n(s) D_1^{s_1} D_2^{s_2} \dots D_n^{s_n} &= \begin{cases} 2\alpha^m, & \text{если } n = 2m, \\ -\alpha^{m-1} x, & \text{если } n = 2m-1, \end{cases} \quad (6) \\
 \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} p_n(s) D_2^{s_1} D_4^{s_2} \dots D_{2n}^{s_n} &= \begin{cases} 2\alpha^n, & \text{если } n = 2m, \\ (2\alpha - x^2)\alpha^{n-1}, & \text{если } n = 2m-1, \end{cases} \\
 \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} x^{-\Omega_n} p_n(s) D_2^{s_1} D_3^{s_2} \dots D_{n+1}^{s_n} &= \alpha^{n-1} 2^{n-2} \frac{4\alpha - x^2}{x^n}, \quad n \geq 2, \\
 \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} x^{-\Omega_n} p_n(s) D_3^{s_1} D_5^{s_2} \dots D_{2n+1}^{s_n} &= \alpha^{n-1} (4\alpha - x^2), \quad n \geq 2, \\
 \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} p_n(s) E_1^{s_1} E_2^{s_2} \dots E_n^{s_n} &= \alpha(-1)^n \delta_{n2}, \quad n \geq 2, \quad (7) \\
 \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} p_n(s) E_2^{s_1} E_4^{s_2} \dots E_{2n}^{s_n} &= (-1)^n \alpha^{n-1} x^2,
 \end{aligned}$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} x^{-\Omega_n} p_n(s) E_2^{s_1} E_3^{s_2} \dots E_{n+1}^{s_n} = \alpha^n x^{-n},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} x^{-\Omega_n} p_n(s) E_3^{s_1} E_5^{s_2} \dots E_{2n+1}^{s_n} = (-1)^n \alpha^2 x^{2-n} \delta_{n2}, \quad n \geq 2, \quad (8)$$

где $\Omega_n = s_1 + \dots + s_n$, $p_n(s) = \frac{(s_1 + \dots + s_n)!}{s_1! \dots s_n!}$.

Пример. Из формул (6), (7) и (8) при $n = 3, 4, 5$ соответственно получаем тождества

$$D_1^3 - 2D_1D_2 + D_3 = \alpha x,$$

$$E_1^4 - 3E_1^2E_2 + 2E_1E_3 + E_2^2 - E_4 = 0,$$

$$E_3^5 - 4E_1E_3^3E_5 + 3E_1^2E_3^2E_7 + 3E_1^2E_3E_5^2 - 2E_1^3E_3E_9 - 2E_1^3E_5E_7 + E_1^4E_{11} = 0.$$

Замечание. Формулы, аналогичные формулам из теоремы 3, для чисел Фибоначчи, Люка, Пелля, Якобсталя, Якобсталя-Люка, Каталана, трибоначчи получены нами в [13–19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lidl R.* Dickson Polynomials / R. Lidl, G. L. Mullen, G. Turnwald. Harlow, Essex (England): Longman Scientific and Technical, 1993. 207 p.
2. *Mullen G.L.* Handbook of Finite Fields / G.L. Mullen, D. Panario. Chapman and Hall/CRC, 2013. 1068 p.
3. *Barbero S.* Dickson polynomials, Chebyshev polynomials, and some conjectures of Jeffery // J. Integer Seq. 2014. Vol. 17. Article 14.3.8.
4. *Charpin P.* Hyperbent functions, Kloosterman sums and Dickson polynomials / P. Charpin, G. Gong // IEEE Trans. Inform. Theory. 2008. Vol. 54(9). P. 4230-4238.
5. *Cipu M.* Dickson polynomial permutations and Gröbner bases / M. Cipu, S.D. Cohen // Contemp. Math. 2008. Vol. 461. P. 79-90.
6. *Fitzgerald R.W.* Generalized reciprocals, factors of Dickson polynomials and generalized cyclotomic polynomials over finite fields / R.W. Fitzgerald, J.L. Yucas // Finite Fields Appl. 2007. Vol. 13. P. 492-515.
7. *Hong S.* Necessary conditions for reversed Dickson polynomials of the second kind to be permutational / S. Hong, X. Qin, W. Zhao // Finite Fields Appl. 2016. Vol. 37. P. 54-71.
8. *Mesnager S.* Bent and Hyper-bent functions in polynomial form and their link with some exponential sums and Dickson polynomials // IEEE Trans. Inform. Theory. 2011. Vol. 57(9). P. 5996-6009.
9. *Wang Q.* Dickson polynomials over finite fields / Q. Wang, J.L. Yucas // Finite Fields Appl. 2012. Vol. 18. P. 814-831.
10. *Bassalygo L.A.* On polynomials of special form over a finite field of odd characteristic attaining the Weil bound / L. A. Bassalygo, V. A. Zinov'ev // Math. Notes. 2005. Vol. 78(1). P. 14-22.
11. *Cahill N.D.* Fibonacci determinants / N.D. Cahill, J.R. D'Errico, D.A. Narayan, J.Y. Narayan // College Math. J. 2002. Vol. 33. 221-225.

12. *Merca M.* A note on the determinant of a Toeplitz-Hessenberg matrix // Spec. Matrices. 2013. Vol. 1. P. 10-16.
13. *Goy T.* On new Catalan identities using Toeplitz-Hessenberg matrices // 11th Inter. Algebraic Conf. in Ukraine, dedicated to the 75th anniv. of V.V. Kirichenko: Book of abstracts. Kyiv: Institute of Mathematics, 2017. P. 49.
14. *Goy T.* On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas identities with multinomial coefficients // Тез.докл. Междунар. конф. «Актуальные проблемы чистой и прикладной математики», посвящ. 100-летию со дня рождения акад. Тайманова А.Д. Алматы: ИМММ, 2017. С. 61-64.
15. *Goy T.* On Pell identities with multinomial coefficients // Материалы Междунар. конф. «Числа, формы и геометрия». Хабаровск: Ин-т приклад. математики, Хабаровское отд., 2017. С. 23-24.
16. *Goy T.* Some combinatorial identities for two-periodic Fibonacci sequence // Материалы XII Междунар. конф. «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики». Махачкала: ДГУ, 2017. С.107-109.
17. *Goy T.* Some tribonacci identities using Toeplitz-Hessenberg determinants // 18th Inter. Scientific M. Kravchuk Conf.: Book of abstracts. Kyiv: NTUU «KPI», 2017. Vol. 1. P. 159-161.
18. *Гой Т.П.* Определители матриц Тейлора-Хессенберга и числа Люка // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. Вып. 11. С. 32-36.
19. *Гой Т.П.* Про нові формули для чисел Фібоначчі // Матеріали VIII Всеукр. наук.-техн. конф. «Інформатика та системні науки (ІСН-2017)». Полтава: ПУЕТ, 2017. С. 51-54.

УДК 532.5

В. А. Коромыслов

Ярославский филиал ПГУПС,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, г. Ярославль, e-mail: s_myslov@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ “МАТЕМАТИКА” ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Показано, как используя систему “Mathematica” можно получить численное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений. Метод использовался при расчете осцилляций заряженной капли движущейся в диэлектрической среде.

Ключевые слова: капля, заряд, неустойчивость, среда, система нелинейных дифференциальных уравнений

V. A. Koromyslov

*Yaroslavl Branch of Emperor Alexander I St. Petersburg State
Transport University,*

*P.G. Demidov Yaroslavl State University
Russia, Yaroslavl, e-mail: s_myslov@mail.ru*

USAGE OF THE SYSTEM "MATHEMATICA" FOR SOLVING SYSTEMS OF NONLINEAR EQUATIONS OF HYDRODYNAMICS

The article shows using the system "Mathematica" for obtaining a numerical solution of a system of nonlinear differential equations. The method was used for calculation oscillations of charged droplet, which moving in a dielectric environment.

Keywords: *drop, заряд, instability, medium, system of nonlinear differential equations*

Быстрое развитие компьютерной техники в последние годы, позволило находить решения громоздких математических задач, на которые раньше ушло бы несколько недель, а то и месяцев. В первую очередь, это, конечно, относится к численным расчетам. Однако последнее время все больше внимания уделяется решениям нелинейных задач, требующих огромных по объему аналитических преобразований. Несомненно, неоценимую помощь в этом могут оказать различные математические пакеты, использующие символьные вычисления.

Несмотря на популярность таких эффективных пакетов численных и символьных вычислений, как Maple и Mathcad, системе Mathematica следует также уделить внимание. Остановимся на некоторых преимуществах этой системы. Во-первых, следует отметить, что удобство набора и наглядность полученных выражений, выгодно отличающих систему Mathematica. Так в Mathcad возможен набор выражения только в одну строку, что приводит к необходимости разбивать одно выражение на несколько. Система Maple лишена этих недостатков, но использование буквенных обозначений для различных операций не позволяет с первого взгляда оценить набранное выражение. Во-вторых, Mathematica обладает более широким набором специальных функций, причем все они реализуются и в комплексной плоскости. Также следует отметить мощные алгоритмы для вычисления аналитических выражений, возможность программирования и вызова внешними программами функций из Mathematica.

Приведем пример использования возможностей системы Mathematica.

Решалась задача о нахождении амплитуды возмущения нелинейно осциллирующей заряженной идеальной проводящей капли радиуса R с плотностью ρ_1 , движущейся с постоянной скоростью U относительно идеальной несжимаемой диэлектрической среды с плотностью ρ_2 и диэлек-

трической проницаемостью ε . Коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела среде – капля обозначим σ , а полный заряд капли - Q .

При решении задачи использовался метод многих временных масштабов, подобно тому, как это проделано в [1-3]. Для упрощения использовались безразмерные переменные, в которых $R = \sigma = \rho = 1$. В результате решения для отыскания амплитуд возмущений $M_n^{(i)}$ осцилляций поверхности капли были получены две связанных системы дифференциальных уравнений:

$$A_n M_{n-2}^{(1)} + B_n \frac{\partial M_{n-1}^{(1)}}{\partial T} + \frac{\partial^2 M_n^{(1)}}{\partial T^2} + \omega_n^2 M_n^{(1)} + C_n \frac{\partial M_{n+1}^{(1)}}{\partial T} + D_n M_{n+2}^{(1)} = 0;$$

$$A_n M_{n-2}^{(2)} + B_n \frac{\partial M_{n-1}^{(2)}}{\partial T} + \frac{\partial^2 M_n^{(2)}}{\partial T^2} + \omega_n^2 M_n^{(2)} + C_n \frac{\partial M_{n+1}^{(2)}}{\partial T} + D_n M_{n+2}^{(2)} = \chi(n) f_n^{(2)};$$

где $M_n^{(1)}$ - амплитуда колебаний n -й моды капли первого порядка малости; $M_n^{(2)}$ - амплитуда колебаний n -й моды капли второго порядка малости, зависящие от времени T . Коэффициент неоднородности $f_n^{(2)}$ определяется весьма сложным выражением, зависящим от амплитуд первого порядка малости $M_n^{(1)}$ и остальных параметров задачи, и поэтому здесь не приводится в виду крайней громоздкости. Коэффициенты $A_n, B_n, C_n, D_n, \omega_n$ зависят от параметров задачи и не зависят от времени T .

Аналитическое решение данной задачи возможно либо для неподвижной капли [4, 5], либо в отсутствии межмодового взаимодействия, но тогда задача фактически сведется к задаче, изложенной в [4]. Таким образом, остается только численно решать задачу. Несмотря на наличие таких эффективных пакетов символьных вычислений, как Mathematica, Maple и Mathcad, численное решение подобных систем остается весьма длительным процессом. Получение решения для системы из пяти–шести уравнений для амплитуд первого и второго порядка малости занимает несколько часов. При этом довольно проблематично проверить считает компьютер или просто завис. Однако процесс получения решения можно ускорить в несколько раз. Во-первых, можно предварительно получить решение для системы амплитуд первого порядка малости $M_n^{(1)}$. Система линейная, и вполне можно было бы получить аналитическое решение, если бы не межмодовое взаимодействие. Численное нахождение амплитуд первого порядка позволяет, предварительно вычислить нелинейные коэффициенты $f_n^{(2)}$ для различных моментов времени T , а затем интерполировать функции $f_n^{(2)}$ на основе полученных результатов гладкими функциями.

Таким образом, проведя предварительные вычисления, можно приступать к основной части – нахождению амплитуд второго порядка малости $M_n^{(2)}$. Счет существенно ускоряется, поскольку не приходится вычислять каждый раз новое значение $f_n^{(2)}$, а можно воспользоваться уже готовыми результатами. В результате вычисления занимают 1-2 часа, в зависимости от числа уравнений в системе.

Предложенный метод был использован при решении записанной выше системы уравнений в системе Mathematica. Кроме того, система Mathematica была использована и для проверки аналитической части решения задачи и получения системы дифференциальных уравнений.

В результате анализа численного решения приведенных систем было найдено, что наличие идеальной несжимаемой диэлектрической среды, обтекающей заряженную идеально проводящую каплю, приводит к появлению взаимодействия мод как в первом, так и во втором порядках малости, следствием чего является возбуждение мод, отсутствующих в спектре мод, определяющих начальную деформацию капли. С увеличением скорости потока растут и амплитуды колебаний изначально невозмущенных мод. Наличие относительного движения капли и среды, а также взаимодействия мод приводит к снижению критических для реализации неустойчивости капли величин собственного заряда, скорости и плотности внешней среды. Кроме того, следует отметить, что амплитуда изначально невозмущенных мод достаточно быстро убывает с ростом разности возбужденной и исследуемой мод. Причем амплитуды соседних мод различаются примерно на порядок, т.е. $M_n^{(i)} / M_{n+1}^{(i)} \sim 10$. Это относится к амплитудам и первого, и второго порядка малости. Так что, вклад в спектр осциллирующих мод с номером, сильно отличающимся от номера изначально возбужденной моды, становится пренебрежимо малым. Таким образом, при одномодовом возбуждении можно ограничиться нахождением решения для 5 уравнений первого порядка и 7-9 уравнениями второго порядка малости.

Автор выражает благодарность за участие в кропотливой вычислительной работе Н. А. Шубина г. Воронеж, школа № 14 и Т. И. Лавренова г. Москва, гимназия № 1558.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2006. Т.76, вып.05. С.16-26.
2. Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2004. Т.74, вып.09. С.23-31.
3. Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2000. Т.70, вып.07. С.26-34.
4. Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т.73, вып.09. С.44-51.
5. Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н. // Письма в ЖТФ. 1997. Т.23, № 19. С.60-65.

УДК 511.41

Н. И. Крючков

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: kryuchkov.n@gmail.com

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ С ПЕРИОДАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Изучаются квадратичные иррациональности, которые задаются периодическими цепными дробями, имеющими специальный период.

Ключевые слова: периодическая цепная дробь, квадратичная иррациональность, период.

N. I. Kryuchkov

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: kryuchkov.n@gmail.com

PERIODIC CONTINUED FRACTIONS WITH SPECIAL PERIODS

We study quadratic irrationals, which are given by periodic continued fractions having a special period.

Keywords: periodic continued fraction, quadratic irrationals, period.

Согласно хорошо известной теореме Эйлера–Лагранжа ([3, теорема 8.9]) периодические бесконечные цепные дроби и только они представляют квадратичные иррациональности (иррациональные корни квадратных уравнений с целыми коэффициентами). В.И. Арнольд в [1] изучал корни квадратных уравнений вида $x^2 + px + q = 0$ (с целыми p и q) для исследования статистики периодов квадратичных иррациональностей. Им поставлен ряд задач об исследовании статистик, связанных с другими квадратичными иррациональностями, а также обращено внимание на важность изучения конкретных объектов. В связи с этим может представлять интерес поиск квадратных уравнений и квадратичных иррациональностей, которые представляются цепными дробями, имеющими заданный период. В настоящей работе изучаются бесконечные периодические цепные дроби с периодами определенного вида, строятся квадратные уравнения, корнями которых являются указанные цепные дроби, и изучаются некоторые асимптотические свойства указанных дробей.

Обозначения и терминология настоящей работы заимствованы из [3] (в частности, допускается, что последний элемент конечной цепной дроби может равняться 1. Конечные цепные дроби обозначаются

$[a_0; a_1, \dots, a_h]$, смешанные периодические дроби обозначаются так: $[a_0; a_1, \dots, a_h, \overline{a_{h+1}, \dots, a_{h+k}}]$, соответственно чисто периодические дроби обозначаются: $[\overline{a_0; a_1, \dots, a_{k-1}}]$. Периоды цепных дробей, которые исследуются в настоящей работе, состоят «в основном» из единиц. Удивительным образом оказывается, что коэффициенты квадратных уравнений, задающих такие дроби, связаны с числами Фибоначчи. Напомним, что последовательность $F_0, F_1, \dots, F_n, \dots$ называется последовательностью Фибоначчи, если $F_0 = 0, F_1 = 1, \dots, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

Лемма. Для любых натуральных чисел n и p справедливо равенство

$$[\underbrace{1; 1, \dots, 1}_n, p] = \frac{pF_{n+1} + F_n}{pF_n + F_{n-1}}.$$

Доказательство. Утверждение доказывается индукцией по n . При $n = 1$ это проверяется непосредственно. Пусть утверждение верно при $n = k$, докажем, что оно останется верным при $n = k + 1$. Число $[\underbrace{1; 1, \dots, 1}_{k+1}, p]$

получается из $[\underbrace{1; 1, \dots, 1}_k, p]$ заменой p на $1 + \frac{1}{p}$, поэтому, учитывая предположение индукции, получаем, что

$$\begin{aligned} [\underbrace{1; 1, \dots, 1}_{k+1}, p] &= \frac{\left(1 + \frac{1}{p}\right)F_{k+1} + F_k}{\left(1 + \frac{1}{p}\right)F_k + F_{k-1}} = \frac{(p+1)F_{k+1} + pF_k}{(p+1)F_k + pF_{k-1}} = \frac{p(F_{k+1} + F_k) + F_{k+1}}{p(F_k + F_{k-1}) + F_k} = \\ &= \frac{pF_{k+2} + F_{k+1}}{pF_{k+1} + F_k}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $\alpha_n^{(p)} = [\underbrace{1; 1, \dots, 1}_n, p]$. Тогда $\alpha_n^{(p)}$ является положительным корнем квадратного уравнения

$$(pF_n + F_{n-1})x^2 - pF_{n+1}x - F_{n-1} = 0,$$

то есть

$$[\underbrace{1; 1, \dots, 1}_n, p] = \alpha_n^{(p)} = \frac{pF_{n+1} + \sqrt{p^2 F_{n+1}^2 + 4F_{n-1}(pF_n + F_{n-1})}}{2(pF_n + F_{n-1})}.$$

Доказательство. Из определения числа $\alpha_n^{(p)}$ следует, что оно удовлетворяет уравнению $\alpha_n^{(p)} = [\underbrace{1; 1, \dots, 1}_n, p, \alpha_n^{(p)}]$, и поэтому, учитывая

лемму, получим, что

$$\alpha_n^{(p)} = \frac{\left(p + \frac{1}{\alpha_n^{(p)}}\right) F_{n+1} + F_n}{\left(p + \frac{1}{\alpha_n^{(p)}}\right) F_n + F_{n-1}}, \text{ то есть } \alpha_n^{(p)} = \frac{(\alpha_n^{(p)} p + 1) F_{n+1} + \alpha_n^{(p)} F_n}{(\alpha_n^{(p)} p + 1) F_n + \alpha_n^{(p)} F_{n-1}}.$$

Из последнего равенства вытекает утверждение теоремы.

Напомним, что квадратичная иррациональность α называется приведенной, если $\alpha > 1$ и сопряженное к ней число α' удовлетворяет неравенствам $-1 < \alpha' < 0$. Приведенные квадратичные иррациональности и только они задаются чисто периодическими цепными дробями [3, теорема 8.10]. Известно также, что число $-\frac{1}{\alpha'}$ имеет период, состоящий из чисел периода α , записанных в обратном порядке [3, лемма 8.6].

Следствие 1. Для любых натуральных n и p период цепной дроби, представляющей число $\frac{\sqrt{p^2 F_{n+1}^2 + 4F_{n+1}(pF_n + F_{n-1})}}{2F_{n+1}}$, имеет вид $(p, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^n)$.

Доказательство. Число $\frac{\sqrt{p^2 F_{n+1}^2 + 4F_{n+1}(pF_n + F_{n-1})}}{2F_{n+1}}$ — это в точности число $-\frac{1}{\alpha'}$, где $\alpha = \frac{pF_{n+1} + \sqrt{p^2 F_{n+1}^2 + 4F_{n+1}(pF_n + F_{n-1})}}{2(pF_n + F_{n-1})}$.

Следствие 2. Для любого натурального n верны равенства

$$\text{i) } \overbrace{[1; 1, \dots, 1, 2]}^n = \frac{F_{n+1} + \sqrt{F_{n+1} F_{n+3}}}{F_{n+2}}; \quad \text{ii) } \sqrt{\frac{F_{n+3}}{F_{n+1}}} = 1 + \overbrace{[1, 1, \dots, 1, 2]}^n.$$

Доказательство. i) Согласно теореме 1

$$\begin{aligned} \overbrace{[1; 1, \dots, 1, 2]}^n &= \frac{2F_{n+1} + \sqrt{4F_{n+1}^2 + 4F_{n+1}(pF_n + F_{n-1})}}{2(pF_n + F_{n-1})} = \frac{F_{n+1} + \sqrt{F_{n+1}^2 + F_{n+1}(2F_n + F_{n-1})}}{2F_n + F_{n-1}} = \\ &= \frac{F_{n+1} + \sqrt{F_{n+1}^2 + F_{n+1}(F_n + F_n + F_{n-1})}}{F_n + F_n + F_{n-1}} = \frac{F_{n+1} + \sqrt{F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_{n+2}}}{F_{n+2}} = \\ &= \frac{F_{n+1} + \sqrt{F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2})}}{F_{n+2}} = \frac{F_{n+1} + \sqrt{F_{n+1}F_{n+3}}}{F_{n+2}}. \end{aligned}$$

ii) Число, противоположное обратному числу, которое сопряжено с $\frac{F_{n+1} + \sqrt{F_{n+1}F_{n+3}}}{F_{n+2}}$, после несложных преобразований записывается как

$1 + \sqrt{\frac{F_{n+3}}{F_{n+1}}}$. Докажем, что это число также является приведенным. Действи-

тельно ясно, что это число больше 1. Далее, сопряженное к нему имеет

вид $1 - \sqrt{\frac{F_{n+3}}{F_{n+1}}}$. Далее, $\frac{F_{n+3}}{F_{n+1}} = \frac{2F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 2 + \frac{F_n}{F_{n+1}} < 3$, поэтому

$-1 < 1 - \sqrt{\frac{F_{n+3}}{F_{n+1}}} < 0$, значит, число $1 + \sqrt{\frac{F_{n+3}}{F_{n+1}}}$ также выражается чисто пе-

риодической цепной дробью и ее период образован числами, составляю-

щими период числа $\frac{F_{n+1} + \sqrt{F_{n+1}F_{n+3}}}{F_{n+2}}$, но записанными в обратном поряд-

ке, зна-

чит, $1 + \sqrt{\frac{F_{n+3}}{F_{n+1}}} = [\overline{2; 1, \underbrace{1, \dots, 1}_n}]$, а поэтому $\sqrt{\frac{F_{n+3}}{F_{n+1}}} = 1 + [\overline{1, \underbrace{1, \dots, 1}_n, 2}]$.

Следствие 3. Для любого натурального n верно равенство

$$[\overline{1; \underbrace{1, \dots, 1}_n, 3}] = \frac{3F_{n+1} + \sqrt{F_{n+1}F_{n+7}}}{2(F_n + F_{n+2})}.$$

Доказательство. Согласно теореме 1

$$[\overline{1; \underbrace{1, \dots, 1}_n, 3}] = \frac{3F_{n+1} + \sqrt{9F_{n+1}^2 + 4F_{n+1}(3F_n + F_{n-1})}}{2(3F_n + F_{n-1})}.$$

Преобразуем знаменатель:

$$3F_n + F_{n-1} = 2F_n + F_n + F_{n-1} = 2F_n + F_{n+1} = F_n + F_{n+2}.$$

Преобразуем подкоренное выражение

$$\begin{aligned} & 9F_{n+1}^2 + 4F_{n+1}(3F_n + F_{n-1}) = \\ & = 9F_{n+1}^2 + 4F_{n+1}(F_n + F_{n+2}) = 13F_{n+1}^2 + 8F_nF_{n+1} = 8F_{n+1}(F_{n+1} + F_n) + 5F_{n+1}^2 = \\ & = 8F_{n+1}F_{n+2} + 5F_{n+1}^2 = 5F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) + 3F_{n+1}F_{n+2} = 5F_{n+1}F_{n+3} + 3F_{n+1}F_{n+2} = \\ & = 3F_{n+1}(F_{n+3} + F_{n+2}) + 2F_{n+1}F_{n+3} = 3F_{n+1}F_{n+4} + 2F_{n+1}F_{n+3} = \\ & = 2F_{n+1}F_{n+5} + F_{n+1}F_{n+4} = F_{n+1}F_{n+6} + F_{n+1}F_{n+5} = F_{n+1}F_{n+7}. \end{aligned}$$

Исследуем теперь периодические цепные дроби вида $[A; \underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, p]$,

где A – любое целое число; p – любое натуральное.

Теорема 2. Для любого целого A и любых натуральных n и p справедливо равенство $[A; \underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, p] = A - \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 F_{n+1}^2 + 4F_{n+1}(pF_n + F_{n-1})}}{2F_{n+1}}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} [A; \underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, p] &= A + \frac{1}{\underbrace{[1, 1, \dots, 1, p]}_n} = A + \frac{2(pF_n + F_{n-1})}{pF_{n+1} + \sqrt{p^2 F_{n+1}^2 + 4F_{n+1}(pF_n + F_{n-1})}} = \\ &= A + \frac{2(pF_n + F_{n-1})(pF_{n+1} - \sqrt{p^2 F_{n+1}^2 + 4F_{n+1}(pF_n + F_{n-1})})}{-4F_{n+1}(pF_n + F_{n-1})} = \\ &= A - \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 F_{n+1}^2 + 4F_{n+1}(pF_n + F_{n-1})}}{2F_{n+1}}. \end{aligned}$$

Следствие 4. Для любого целого A и любого натурального n справедливо равенство $[A; \underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, 2] = (A+1) - \sqrt{\frac{F_{n+3}}{F_{n+1}}}$.

Доказательство. Используя следствие 2, получаем

$$\begin{aligned} [A; \underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, 2] &= A + \frac{1}{\underbrace{[1, 1, \dots, 1, 2]}_n} = A + \frac{F_{n+2}}{F_{n+1} + \sqrt{F_{n+1}F_{n+3}}} = \\ &= A + \frac{F_{n+2}(F_{n+1} - \sqrt{F_{n+1}F_{n+3}})}{F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_{n+3}} = A + \frac{F_{n+2}(F_{n+1} - \sqrt{F_{n+1}F_{n+3}})}{F_{n+1}(F_{n+1} - F_{n+3})} = \\ &= A + \frac{F_{n+2}(F_{n+1} - \sqrt{F_{n+1}F_{n+3}})}{F_{n+1}(-F_{n+2})} = A - 1 + \sqrt{\frac{F_{n+3}}{F_{n+1}}}. \end{aligned}$$

В конце статьи укажем некоторые предельные соотношения. Обозначив через $a_n^{(p)}$ конечную цепную дробь $[1, \underbrace{1, \dots, 1}_n, p]$, легко видеть, используя лемму, что при любом фиксированном n выполняется равенство

$\lim_{p \rightarrow \infty} a_n^{(p)} = \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Далее, хорошо известно [4], что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Число $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ обычно называют золотым сечением и обозначают φ . Легко проверить, что $\varphi^2 = \varphi + 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+k}}{F_n} = \varphi^k$. Снова, используя лемму, получим, что при любом фиксированном p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(p)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pF_{n+1} + F_n}{pF_n + F_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p \frac{F_{n+1}}{F_n} + 1}{p + \frac{F_{n-1}}{F_n}} = \frac{p\varphi + 1}{p + \frac{1}{\varphi}} = \varphi.$$

Используя полученные ранее формулы для квадратичных иррациональностей, представляющих изученные периодические цепные дроби, можно получить асимптотики для этих чисел. Например, нетрудно проверить, используя следствие 2, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{[1, 1, \dots, 1, 2]}_n = \varphi$, а, используя теорему

1, легко найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{[1, 1, \dots, 1, p]}_n$ для произвольного p .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. Статистика периодов цепных дробей квадратичных иррациональностей // Изв. Рос. акад. наук. Сер. математическая. 2008. Т. 72, вып. 1. С. 3-38.
2. Грэхем Р. Конкретная математика. Основание информатики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. М.: Мир; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 703 с.
3. Нестеренко Ю.В. Теория чисел: учебник для студ. высш. учеб. заведений. М.: Академия, 2008. 272 с.
4. Романовский И.В. Дискретный анализ: Учебное пособие для студентов, специализирующихся по прикладной математике и информатике. 3-е изд., перераб. и доп. СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2003. 320 с.

УДК 512.7:514.14

Л. Б. Медведева¹, Л. А. Сидорова²

¹Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны

²Ярославский государственный технический университет

Россия, г. Ярославль, e-mail: lbmedvedeva@yandex.ru

e-mail: sidorovala@ystu.ru

МНОГООБРАЗИЕ ОДНОМЕРНЫХ БИСЕКАНТ НОРМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СТЕПЕНИ $N-1$ В N -МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Указан конструктивный способ задания нормальной рациональной поверхности степени $n-1$ в проективном пространстве P^n . Изучено многообразие одномерных бисекант этой поверхности.

Ключевые слова: *грассманиан, подмногообразия на грассманиане, бисеканта, цикл Шуберта, элементарные числовые характеристики.*

L. B. Medvedeva¹, L. A. Sidorova²

¹Yaroslavl Higher Military School of Air Defense

²Yaroslavl State Technical University

Russia, Yaroslavl, e-mail: lbmedvedeva@yandex.ru

sidorovala@ystu.ru

THE VARIETY OF ONE-DIMENSIONAL BISECANTS OF THE NORMAL SURFACE OF DEGREE $N-1$ IN N -DIMENSIONAL PROJECTIVE SPACE

The paper gives a constructive method for defining rational normal surface of degree $n-1$ in the projective space P^n . We study the variety of one-dimensional biseccants of this surface.

Keywords: *Grassmannian, subvarieties of grassmannian, biseccant, Schubert cycle, elementary numerical characteristics.*

В статье [1] было исследовано множество прямых n -мерного проективного пространства, пересекающих нормальную рациональную кривую n -й степени в двух точках. Как известно [2, с. 352-371], такая кривая может быть получена конструктивно как множество точек пересечения соответственных прямых двух связок, между которыми установлено проективное, но перспективное соответствие.

Указанный способ построения кривой можно обобщить, рассмотрев проективное соответствие между двумя связками двумерных плоскостей с одномерными вершинами проективного пространства. Соответственные плоскости таких связок, пересекаясь, образуют некоторую поверхность. Целью работы является исследование многообразия прямых проективного пространства P^n ($n \geq 4$), пересекающих эту поверхность в двух точках. Такие прямые называются бисекантами.

Пусть в n -мерном проективном пространстве P^n фиксированы две связки 2-плоскостей $C(l_1)$ и $C(l_2)$ с одномерными вершинами l_1 и l_2 и установлено проективное (но не перспективное) отображение

$$f : C(l_1) \rightarrow C(l_2). \quad (1)$$

Множество точек пересечения соответственных 2-плоскостей этих связок является двумерной поверхностью степени $n-1$. Действительно, проективное отображение (1) индуцирует проективное преобразование произвольно выбранной $n-2$ -плоскости $P^{n-2} \subset P^n$: $\tilde{f} : P^{n-2} \mapsto P^{n-2}$. Соответственными в этом преобразовании являются точки пересечения с P^{n-2} соответственных плоскостей связок. Как известно, проективное преобразование пространства P^{n-2} имеет $n-1$ неподвижную точку. Эти точки и являются общими точками искомого (известного) многообразия и $(n-2)$ -плоскости P^{n-2} . Так как это многообразие пересекается с P^{n-2} в конечном числе точек, то его размерность равна двум, а число $n-1$ точек пересечения с P^{n-2} равно его степени. Отсюда обозначение этого многообразия символом V_2^{n-1} .

Многообразию бисекант поверхности $V_2^{n-1} \subset P^n$ обозначим символом K . Определим элементарные числовые характеристики этого многообразия прямых.

Так как всякое семейство прямых в P^n есть подмногообразие грассманиана $G(2, n+1)$, $\dim G(2, n+1) = 2(n-1)$, то $\dim K = 4$, а $\text{codim} K = 2(n-3)$. По теореме о базисе на грассманиане прямых $G(2, n+1)$ [3, с. 219] многообразие K можно представить в виде линейной комбинации циклов Шуберта $\sigma_{a_1 a_2}$ коразмерности $2(n-3)$:

$$K = \sum (K \cdot \sigma_{n-1-a_2, n-1-a_1}) \cdot \sigma_{a_1 a_2},$$

где $n-1 \geq a_1 \geq a_2$ и $a_1 + a_2 = 2(n-3)$.

Таких циклов будет три, и поэтому разложение K имеет вид

$$K = (K \cdot \sigma_{40}) \cdot \sigma_{n-1, n-5} + (K \cdot \sigma_{31}) \cdot \sigma_{n-2, n-4} + (K \cdot \sigma_{22}) \cdot \sigma_{n-3, n-3}. \quad (2)$$

Коэффициенты при циклах Шуберта $\sigma_{a_1 a_2}$ коразмерности $2(n-3)$ в этом разложении являются элементарными числовыми характеристиками многообразия K , которые и предстоит определить. Выпишем их и выясним геометрический смысл каждой. Для этого воспользуемся терминологией монографии [3].

Грассманиан $G(k+1, n+1)$ рассматривается в книге [2] как многообразиие k -мерных плоскостей в P^n и обозначается символом $\Omega(k, n)$. Понятию цикла Шуберта $\sigma_{a_1 \dots a_{n+1}}$ на $G(k+1, n+1)$ соответствует понятие шубертова многообразия на $\Omega(k, n)$, которое обозначается символом $\Omega_{b_0 \dots b_n}$, и если $(a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$ – невозрастающая последовательность из неотрицательных целых чисел, сумма которых равна $n-1$, то (b_0, b_1, \dots, b_k) – возрастающая последовательность таких чисел, не превосходящих n . Нетрудно показать, что зависимость между числами a_i и b_j определяется формулой $b_i = n - k + (i-1) - a_i$. Из сказанного следует, что элементарная числовая характеристика $\delta_{n-1-a_2, n-1-a_1} = K \cdot \sigma_{n-1-a_2, n-1-a_1}$ многообразия K в новой символике примет вид $K \cdot \Omega_{a_2, a_1-1}$.

1. $\delta_{40} = K \cdot \sigma_{40} = K \cdot \Omega_{n-5, n}$ – количество прямых из K , пересекающих заданную в P^n плоскость P^{n-5} .

2. $\delta_{31} = K \cdot \sigma_{31} = K \cdot \Omega_{n-4, n-1}$ – количество прямых из K , пересекающих данную P^{n-4} и лежащих в $P^{n-1} \supset P^{n-4}$.

3. $\delta_{22} = K \cdot \sigma_{22} = K \cdot \Omega_{n-3, n-2}$ – число прямых из K , лежащих в заданном пространстве P^{n-2} размерности $n-2$.

Для определения значений числовых характеристик применим принцип специализации. Согласно этому принципу поверхность V_2^{n-1} следует считать распавшейся на $(n-1)$ 2-плоскостей, каждая из которых, начиная со второй, пересекает предыдущую по прямой, а каждая i -я, начиная с третьей, пересекается с $(i-2)$ -й в точке, так что линейная оболочка всех плоскостей совпадает с P^n . Многообразиие K прямых преобразуется при этом в свою специализацию \tilde{K} , состоящую из прямых, пересекающих каждые две плоскости, составляющие многообразиие V_2^{n-1} , а потому распадается на отдельные компоненты, определяемые каждой парой плоскостей.

Компоненты многообразиие \tilde{K} можно разбить на группы: в одну группу входят компоненты, определяемые одинаковым расположением

пары плоскостей. Поэтому компоненты, составляющие каждую группу, не отличаются элементарными числовыми характеристиками.

Среди плоскостей, на которые распадается поверхность V_2^{n-1} , можно выделить следующие пары:

1) пары плоскостей, пересекающихся по прямой. Линейная оболочка любой такой пары плоскостей совпадает с P^3 ;

2) пары плоскостей, имеющих одну общую точку. Линейная оболочка этих пар плоскостей совпадает с пространством P^4 ;

3) пары непересекающихся плоскостей. Их линейная оболочка совпадает с пространством P^5 .

Согласно сказанному компоненты многообразия \tilde{K} распределяются по трем группам.

Первая группа определяется парой плоскостей, пересекающихся по прямой. Если плоскости специализации перенумеровать, то этими парами будут плоскости: $(1, 2), (2, 3), (3, 4), \dots, (n-2, n-1)$, и поскольку число пар равно $(n-2)$, то и число компонент в первой группе равно $(n-2)$. Очевидно, что компонента K_1 , представляющая эту группу, является грассманианом $G(2, 4)$, а значит, $\dim K_1 = 4$, и в символах теории шубертовых многообразий K_1 записывается следующим образом:

$$K_1 = \Omega_{23}. \tag{3}$$

2. Компоненты второй группы определяются парами плоскостей, имеющих одну общую точку: $(1, 3), (2, 4), \dots, (n-3, n-1)$. Обозначим через K_2 компоненту, представляющую эту группу. Таких компонент будет $(n-3)$. Компонента K_2 является подмногообразием грассманиана $G(2, 5)$. В символах теории шубертовых многообразий K_2 представляется следующим образом:

$$K_2 = \Omega_{24}^2. \tag{4}$$

3. Третья группа содержит компоненты, определенные двумя непересекающимися плоскостями. Вычислим количество элементов в этой группе. Для этого выпишем символы, представляющие элементы этой группы, в определенном порядке:

$$\begin{array}{ccc} (1,5) & (2,5) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ (1, n-1) & (2, n-1) & \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} (n-5, n-2) \\ (n-5, n-1) \quad (n-4, n-1). \end{array}$$

Число символов в первом столбце равно $(n-4)$, во втором – $(n-5)$, в третьем – $(n-6)$ и т.д., в последнем – один символ. Количество элементов в группе равно числу

$$H = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-6) + (n-5) + (n-4) = \frac{(n-3)(n-4)}{2}.$$

Таким образом, в последней группе число компонент равно $\frac{(n-3) \cdot (n-4)}{2}$. Обозначим через K_3 компоненту, представляющую эту группу. Очевидно, что K_3 является подмногообразием грассманиана $G(2, 6)$ и представляет собой пересечение двух шубертовых многообразий Ω_{25} :

$$K_3 = \Omega_{25}^2. \quad (5)$$

Для отыскания значений элементарных числовых характеристик многообразий K_i ($i=1,2,3$), представляющих i -тые группы, каждое из них нужно записать в виде линейной комбинации циклов Шуберта, коразмерности которых равны коразмерности K_i ($i=1,2,3$).

1. Так как многообразие K_1 является грассманианом $G(2, 4)$ и $\dim K_1 = 4$, $\dim G(2, 4) = 4$, то $\text{codim } K_1 = 0$. Значит, K_1 можно представить в виде линейной комбинации циклов Шуберта, коразмерности нуль:

$$K_1 = (K_1 \cdot \sigma_{22})\sigma_{00} = \delta_{22} \cdot \sigma_{00}.$$

С другой стороны,

$$K_1 = \Omega_{23} = \sigma_{00}.$$

Сравнивая это представление с разложением по базису, видим, что K_1 имеет следующие элементарные числовые характеристики:

$$\delta_{22} = 1, \delta_{31} = 0, \delta_{40} = 0.$$

2. Как уже отмечалось выше, $K_2 \subset G(2, 5)$, $\dim K_2 = 4$, $\dim G(2, 5) = 6$, поэтому $K_2 \subset G(2, 5)$ является комбинацией циклов Шуберта коразмерности 2:

$$K_2 = (K_2 \cdot \sigma_{31}) \cdot \sigma_{20} + (K_2 \cdot \sigma_{22})\sigma_{11} = \delta_{22} \cdot \sigma_{11} + \delta_{31} \cdot \sigma_{20}.$$

Так как, согласно (4) $K_2 = \Omega_{24}^2 = \sigma_{10}^2$, то для вычисления этого пересечения циклов Шуберта применим формулу Пиери [3]:

$$K_2 = \sigma_{10}^2 = \sigma_{20} + \sigma_{11}.$$

Сравнивая данное представление с разложением по базису, видим, что K_2 имеет следующие элементарные числовые характеристики:

$$\delta_{22} = 1, \delta_{31} = 1, \delta_{40} = 0.$$

3. Компонента K_3 является подмногообразием грассманиана $G(2, 6)$. Так как $\dim K_3 = 4$, $\dim G(2, 6) = 8$, то $\text{codim } K_3 = 4$. Значит, согласно теореме о базисе, K_3 можно представить в виде линейной комбинации циклов Шуберта коразмерности 4:

$$\begin{aligned} K_3 &= (K_3 \cdot \sigma_{40}) \cdot \sigma_{40} + (K_3 \cdot \sigma_{31}) \cdot \sigma_{31} + (K_3 \cdot \sigma_{22}) \cdot \sigma_{22} = \\ &= \delta_{40} \cdot \sigma_{40} + \delta_{31} \sigma_{31} + \delta_{22} \cdot \sigma_{22}. \end{aligned}$$

Из (5) имеем

$$K_3 = \Omega_{25}^2 = \sigma_{20}^2 = \sigma_{40} + \sigma_{31} + \sigma_{22}.$$

Сравнивая это представление с разложением по базису, видим, что K_3 имеет следующие элементарные числовые характеристики:

$$\delta_{22} = 1, \delta_{31} = 1, \delta_{40} = 1.$$

Итак, мы нашли количество элементарных числовых характеристик многообразия K , число групп, на которые можно разбить множество компонент специализации \tilde{K} этого многообразия, число элементов в группах, значения элементарных числовых характеристик компоненты из каждой группы.

Теперь можно найти элементарные числовые характеристики многообразия бисекант нормальной поверхности $V_2^{n-1} \subset P^n$, просуммировав соответствующие элементарные числовые характеристики всех компонент многообразия \tilde{K} .

Результаты вычислений приведены в таблице 1.

Таблица 1

Многообразие	Количество элементов в группе специализации	Элементарные числовые характеристики		
		δ_{40}	δ_{31}	δ_{22}
K_1	$n - 2$	0	0	1
K_2	$n - 3$	0	1	1
K_3	$\frac{(n-3) \cdot (n-4)}{2}$	1	1	1
K		$\frac{(n-3) \cdot (n-4)}{2}$	$\frac{(n-3) \cdot (n-2)}{2}$	$\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Медведева Л.Б., О многообразии бисекант нормальной кривой // Математика и естественные науки. Теория и практика. Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 52-56.

2. Ходж В., Методы алгебраической геометрии. Т. 1 / В. Ходж, Д. Пидо. М.: ИЛ, 1954. 461 с.
3. Ходж В., Методы алгебраической геометрии. Т. 2 / В. Ходж, Д. Пидо. М.: ИЛ, 1954. 429 с.
4. Гриффитс Ф. Принципы алгебраической геометрии. Т.1 / Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. М.: Мир. 1982. 496 с.
5. Дж. Харрис. Алгебраическая геометрия. Начальный курс / пер.с англ. под ред. Ф.Л. Зака. М.: МЦНМО, 2005. 400 с.

УДК 517.512

А. Б. Назимов

Вологодский государственный университет
Россия, г. Вологда, e-mail: n.acbar54@mail.ru

О СИММЕТРИЧЕСКИХ И НЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ЧАСТИЧНЫХ СУММАХ РЯДОВ ФУРЬЕ

В статье рассматриваются два определения частичных сумм рядов Фурье. Приводятся некоторые достаточные условия эквивалентности их сходимости и пример функции, для которой они не являются эквивалентными.

Ключевые слова: ряды Фурье, симметричные и несимметричные частичные суммы, сходимость.

A. B. Nazimov

Vologda State University
Russia, Vologda, e-mail: n.acbar54@mail.ru

ABOUT SYMMETRIC AND NON-SYMMETRIC PARTIAL SUMS OF FOURIER SERIES

The paper deals with two definitions of the partial sums of the Fourier series. We give some sufficient conditions for the equivalence of their convergence and an example of a function for which they are not equivalent.

Keywords: Fourier series, symmetric and non-symmetric partial sums, convergence.

Будем рассматривать ограниченную функцию $f \in C(-\pi, \pi)$. Ее формальный ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikt}, \quad (1)$$

где $f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ ($k \in \mathbb{Z}$) – коэффициенты этого ряда.

Симметрические частичные суммы ряда (1) определяются [1, с. 17] как

$$(S_{-n,n}f)(t) = \sum_{k=-n}^n f_k e^{ikt}. \quad (2)$$

Наряду с (2) рассмотрим несимметрические частичные суммы

$$(S_{-m,n}f)(t) = \sum_{k=-m}^n f_k e^{ikt} \quad (m, n > 0). \quad (3)$$

Если последовательность симметрических частичных сумм имеет предел в $C(-\pi, \pi)$ по норме

$$\|f\|_1 = \sup_{1 \leq n < \infty} \|S_{-n,n}\|_{C[-\pi,\pi]}, \quad (4)$$

где $\|\cdot\|_{C[-\pi,\pi]}$ – равномерная норма в $C[-\pi, \pi]$, то этим пределом является функция f . Множество всех функций $f \in C(-\pi, \pi)$, ряд Фурье которых сходится по норме (4) является банаховым пространством и обозначается $US(-\pi, \pi)$ [2, с. 11-12].

Наряду с нормой (4) рассмотрим норму, порожденную несимметрическими частичными суммами (3):

$$\|f\|_2 = \sup_{1 \leq m, n < \infty} \|S_{-m,n}\|_{C[-\pi,\pi]}. \quad (5)$$

В работе [3, с. 5-13] доказывается, что множество всех функций $f \in C(-\pi, \pi)$, ряд Фурье которых сходится по норме (5), является банаховым пространством и обозначается $UN(-\pi, \pi)$.

Частичные суммы (3) плодотворно использованы в исследовании разрешимости и однозначной разрешимости сингулярного интегрального уравнения Гильберта нейтрального типа (см. [2, 3]) в пространстве Гёльдера $H^\gamma [0, 2\pi]$, $0 < \gamma < 1$ и Лебега $L_2 [0, 2\pi]$.

Очевидно, что сходимость частичных сумм $(S_{-m,n}f)(t)$ при независимом стремлении переменных m и n к $+\infty$ является более жестким условием по сравнению со сходимостью частичных сумм $(S_{-n,n}f)(t)$ при $n \rightarrow +\infty$. Получим достаточное условие, при котором сходимость по частичным суммам $(S_{-m,n}f)(t)$ и $(S_{-n,n}f)(t)$ являются эквивалентными.

Далее будем считать, что f продолжена до 2π -периодической функции.

Теорема. Пусть функция

$$g(x) = \frac{f(x+t) - f(t)}{\sin(x/2)}$$

абсолютно интегрируема по x на отрезке $[-\pi, \pi]$ в данной точке $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда справедливо предельное соотношение

$$\lim_{m, n \rightarrow +\infty} (S_{-m, n} f)(t) = f(t).$$

Доказательство. Имеем

$$(S_{-m, n} f)(t) = \sum_{k=-m}^n f_k e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sum_{k=-m}^n e^{ik(t-s)} ds.$$

Произведем замену переменной интегрирования, полагая $x = s - t$. Тогда

$$(S_{-m, n} f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \sum_{k=-m}^n e^{-ikx} dx. \quad (6)$$

Так как для всех $m > 0$, $n > 0$ имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-m}^n e^{-ikx} dx = 1,$$

то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-m}^n e^{-ikx} dx. \quad (7)$$

Из (6) и (7) будем иметь

$$(S_{-m, n} f)(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t+x) - f(t)) \sum_{k=-m}^n e^{-ikx} dx.$$

Так как

$$\begin{aligned} \sum_{k=-m}^n e^{-ikx} dx &= e^{-inx} \sum_{k=0}^{m+n} e^{ikx} dx = e^{-inx} \frac{e^{i(m+n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \\ &= e^{\frac{i(m-n)}{2}x} \frac{e^{\frac{i(m+n+1)}{2}x} - e^{-\frac{i(m+n+1)}{2}x}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} = e^{\frac{i(m-n)}{2}x} \frac{\sin \frac{m+n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{m-n}{2}x + i \sin \frac{m-n}{2}x \right) \sin \frac{m+n+1}{2}x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{m-n}{2} x \sin \frac{m+n+1}{2} x + i \sin \frac{m-n}{2} x \sin \frac{m+n+1}{2} x \right) = \\
 &= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left(\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) x + i \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x - i \cos \left(m + \frac{1}{2} \right) x \right),
 \end{aligned}$$

то остаточный член ряда (1) для частичной суммы (3), можно представить так:

$$\begin{aligned}
 (S_{-m,n}f)(t) - f(t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+x) - f(t)}{\sin \frac{x}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x dx + \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+x) - f(t)}{\sin \frac{x}{2}} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) x dx + \\
 &+ \frac{i}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+x) - f(t)}{\sin \frac{x}{2}} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x dx + \\
 &- \frac{i}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+x) - f(t)}{\sin \frac{x}{2}} \cos \left(m + \frac{1}{2} \right) x dx. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Из представления (8) и леммы Римана (см. [4, с. 429-431]) вытекает справедливость утверждения теоремы.

Доказанная теорема позволяет сформулировать и установить справедливость равномерной сходимости несимметрических частичных сумм (3) на всем отрезке:

Следствие. Пусть функция

$$h(x) = \frac{f(x+t) - f(t)}{x}$$

абсолютно интегрируема по x на отрезке $[-\pi, \pi]$ равномерно по $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда справедливо предельное соотношение

$$\lim_{m,n \rightarrow +\infty} \|S_{-m,n}f - f\|_C = 0.$$

Однако не для всех непрерывных функций сходимости по этим частичным суммам являются эквивалентными. В качестве примера рассмотрим следующий ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{-2} \frac{i}{2k|\ln|k|} e^{kx} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{i}{2k \ln k} e^{kx}. \quad (9)$$

В [7, т. 1, с. 403] приводится утверждение, что тригонометрический ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} \sin kx \quad (10)$$

является рядом Фурье непрерывной функции, так как он сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$s(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} \sin kx \in C[-\pi, \pi],$$

а ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} \cos kx \quad (11)$$

является рядом Фурье разрывной функции.

Симметрические частичные суммы ряда (9) $S_{-n,n}$ при $n \geq 2$ совпадает с частичными суммами

$$S_n^{(1)}(x) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sin kx$$

ряда (10), и, следовательно, он сходится равномерно по симметрической норме (4) на отрезке $[-\pi, \pi]$. Предельной функцией является $s(x) \in C[-\pi, \pi]$.

Несимметрические частичные суммы ряда (9) $S_{-m,n}$ имеют вид

$$\begin{aligned} S_{-m,n}(x) &= \sum_{k=|m|+1}^n \frac{i}{2k \ln k} e^{kx} = \sum_{k=|m|+1}^n \frac{1}{2k \ln k} (-\sin kx + i \cos kx) = \\ &= - \sum_{k=|m|+1}^n \frac{1}{2k \ln k} \sin kx + i \sum_{k=|m|+1}^n \frac{1}{2k \ln k} \cos kx \end{aligned} \quad (12)$$

при $|m| < n$ и

$$\begin{aligned} S_{-m,n}(x) &= \sum_{k=n+1}^{|m|} \frac{i}{2k \ln k} e^{-kx} = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{|m|} \frac{1}{k \ln k} (\sin kx + i \cos kx) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{|m|} \frac{1}{k \ln k} \sin kx + \frac{i}{2} \sum_{k=n+1}^{|m|} \frac{1}{k \ln k} \cos kx \end{aligned} \quad (13)$$

при $|m| > n$.

Первое слагаемое в равенствах (12) и (13) равномерно стремится к нулю, в силу равномерной сходимости ряда (10). Второе слагаемое и этих равенствах, не обладает аналогичным свойством, так как суммой ряда (11) является разрывная функция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эдварс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. В 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1985. 264 с.
2. *Кахан Ж.-П.* Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М.: Мир, 1976. 206 с.
3. *Абдуваитов, Х.А.* О пространстве равномерно сходящихся рядов Фурье / Х.А. Абдуваитов, Э.М. Мухамадиев, А.Б. Назимов // Интеллектуально-информ. технологии и интеллектуальный бизнес. Вологда: ВоГУ, 2017. С. 5-13.
4. *Назимов А.Б.* Метод регуляризации сдвигом: Теория и приложения. Монография / А.Б. Назимов, Э.М. Мухамадиев, В.А. Морозов, М. Муллоджанов. Вологда: ВоГТУ, 2012. 368 с.
5. *Назимов А.Б.* Сингулярные интегральные уравнения Гильберта нейтрального типа: Теория и алгоритмы. Монография / А.Б. Назимов, М. Муллоджанов, Н.О. Менухова. Вологда: ВоГУ, 2014. 244 с.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. М.: Наука, 1969. 658 с.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. В 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1965. 616 с.

УДК 532.5:537.84

А. А. Очиров

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, Ярославль, *e-mail: otchirov@mail.ru*

О РАСЧЕТЕ ВОЗМУЩЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ВОЛНОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Произведен аналитический расчет возмущения поперечного магнитного поля волновым движением идеальной проводящей жидкости, по поверхности которой распределен электрический заряд.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, идеальная жидкость, жидкие частицы, свободная поверхность.

A. A. Ochirov

*P.G. Demidov Yaroslavl State University
Russia, Yaroslavl, e-mail: otchirov@mail.ru*

ON THE CALCULATION OF THE PERTURBATION OF THE MAGNETIC FIELD BY THE WAVE MOTION OF A CONDUCTING LIQUID

We made the analytical calculation of the perturbation of the magnetic field intensity caused by the wave motion of conducting liquid.

Keywords: magnetic hydrodynamics, ideal fluid, liquid particles, free surface.

При распространении капиллярно-гравитационной волны по поверхности проводящей жидкости ее частицы участвуют в сложном петлеобразном движении. Поверхностный электрический заряд может играть роль регулятора этого движения: с увеличением электрического заряда уменьшается циклическая частота волнового движения, а при достижении некоторого критического значения движение переходит в аperiodический режим с образованием конусообразных структур (конусов Тейлора), с вершин которых сбрасывается излишек электрического заряда в виде маленьких сильно заряженных капель жидкости [1].

Еще более сложным и интересным образом обстоят дела, если проводящая жидкость находится в магнитном поле. В этом случае волновое движение по поверхности жидкости вызывает изменение магнитного поля, которое вызывает электрическое поле. В результате возникновения электрического поля возникают электрические силы, вызывающие электрический ток, который создает магнитное поле, оказывающее влияние на движение проводящей жидкости.

В случае хорошо проводящей жидкости (когда выполняется условие вмороженности силовых линий) для определения магнитного поля при плоском движении жидкости достаточно знать траекторию движения индивидуальных жидких частиц [2]:

$$H_x = H_{x_0} \frac{\partial X}{\partial x_0} + H_{z_0} \frac{\partial X}{\partial z_0},$$
$$H_z = H_{x_0} \frac{\partial Z}{\partial x_0} + H_{z_0} \frac{\partial Z}{\partial z_0}.$$

Здесь $H_{x,z}$ – составляющие напряженности магнитного поля вдоль оси x и z соответственно, H_{x_0,z_0} – начальное значение составляющих напряженности магнитного поля вдоль оси x и z ; x_0, z_0 – начальные координаты Лагранжа жидкой частички (совпадают с начальными координатами в переменных Эйлера), X и Z – траектории движения индивидуальной жидкой частицы. Таким образом, для расчета влияния движения жидкости на изменение магнитного поля достаточно знать уравнения траекторий движения индивидуальных жидких частиц.

Рассматривалась задача по расчету напряженности магнитного поля $\mathbf{H} = \{H_x, H_z\}$ при распространении капиллярно-гравитационной волны с длиной волны λ , амплитудой A по свободной поверхности идеальной идеально проводящей жидкости с плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения γ , занимающей полубесконечное пространство $z < 0$ в декартовой системе координат. Для простоты вычислений движение считалось независимым от горизонтальной координаты y . В первом приближении по амплитуде волны магнитное поле не оказывает влияния на дисперсионное уравнение, связывающее циклическую частоту волнового движения ω с другими параметрами задачи. А простейшее волновое решение задачи в первом приближении по амплитуде волны имеет вид:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2} a \exp(i(\omega t - k x)) + K.C. \\ u_1 &= \frac{1}{2} A \omega \exp(i(\omega t - k x)) \exp(k z) + K.C. \\ v_1 &= -\frac{i}{2} A \omega \exp(i(\omega t - k x)) \exp(k z) + K.C.\end{aligned}$$

Для того чтобы отследить траектории движения индивидуальной жидкой частицы, следует перейти к описанию движения в форме Лагранжа.

Согласно известной формуле [3] собственная горизонтальная скорость частички нижней среды во втором приближении по амплитуде волны рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned}u_{lagr}(x_0, z_0, t) &= u_1(x_0, z_0, t) + u_2(x_0, z_0, t) + \\ &+ \left(\int_0^t u_1(x_0, z_0, \tau) d\tau \right) \left(\frac{\partial u_1(x, z, t)}{\partial x} \right)_0 + \left(\int_0^t v_1(x_0, z_0, \tau) d\tau \right) \left(\frac{\partial u_1(x, z, t)}{\partial z} \right)_0.\end{aligned}$$

Нижний индекс 0 в формуле означает, что соответствующие производные вычисляются в начальном положении жидкой частицы. Границей применимости этой формулы является то, что частицы жидкости не должны смещаться далеко от своего начального положения. В лагранжевой скорости можно выделить лидирующие слагаемые, отвечающие за дрейф

$$V_S = A^2 \omega k \exp(2kz),$$

и лидирующие слагаемые, отвечающие за циклическое движение жидкой частицы:

$$\begin{aligned}u_{lagr1} &= \frac{1}{2} A \omega \exp(i(\omega t - k x_0)) \exp(k z_0) + K.C. \\ v_{lagr1} &= -\frac{i}{2} A \omega \exp(i(\omega t - k x_0)) \exp(k z_0) + K.C.\end{aligned}$$

С течением времени дрейф накапливается, и смещения жидкой частицы от начального положения нельзя считать малыми. Поэтому для корректного применения формулы перехода от эйлера описания поля скоростей к лагранжевому необходимо перейти в систему отсчета, дрейфующую вместе с жидкостью. В связи с переходом в новую систему отсчета, удаляющуюся от источника волнового движения, циклическая частота должна измениться в соответствии с эффектом Доплера: $\omega \rightarrow \omega - kV_S$. В этом случае лидирующие слагаемые, отвечающие за циклические движения жидких частиц, корректно запишутся в виде:

$$u_{lagr1} = \frac{1}{2} A \omega \exp(i((\omega - kV_S)t - kx_0)) \exp(kz_0) + K.C.$$

$$v_{lagr1} = -\frac{i}{2} A \omega \exp(i((\omega - kV_S)t - kx_0)) \exp(kz_0) + K.C.$$

Проинтегрировав эти выражения по времени, несложно получить траектории движения индивидуальных частиц жидкости:

$$X = x_0 + A \exp(kz_0) \left(\sin(kx_0) + \sin(\omega(1 - A^2k^2)t - kx_0) \right) + A^2 \exp(kz_0) k \omega t,$$

$$Z = A \exp(kz_0) \cos(\omega(1 - A^2k^2)t - kx_0).$$

Подставив уравнения для траектории в формулу для расчета магнитного поля, получим:

$$H_x = H_{x0} \left[1 + A \exp(kz_0) k \left(\cos(kx_0) - \cos(kx_0 - \omega t + A^2k^2\omega t) \right) \right] +$$

$$+ A \exp(kz_0) H_{z0} k \left[A k \omega t + \sin(kx_0) - \sin(kx_0 - \omega t + A^2k^2\omega t) \right],$$

$$H_z = A \exp(kz_0) k \left(H_{z0} \cos(kx_0 - \omega t + A^2k^2\omega t) - H_{x0} \sin(kx_0 - \omega t + A^2k^2\omega t) \right).$$

Используя предложенную несложную процедуру расчета траекторий движения индивидуальных жидких частиц, можно рассчитать возмущение магнитного поля, вызванное распространением капиллярно-гравитационных волн по поверхности проводящей жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоножко Д.Ф. Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости: монография / Д.Ф. Белоножко, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев. Ярослав. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 288с.
2. Молчанов С.А. Кинематическое динамо в случайном потоке / С.А. Молчанов, А.А. Рузмайкин, Д.Д. Соколов // УФН. 1985. Т. 145. С. 593–628.
3. Ле Блон П. Волны в океане. Ч.1. / П. Ле Блон, Л. Майсек. М.: Мир, 1981. 480 с.

УДК 531:519.6

И. А. Панкратов

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, г. Саратов, e-mail: pankratovia@info.sgu.ru

ЭВОЛЮЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕЛЁТОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С РАЗРЫВНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В кватернионной постановке рассмотрена задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА). Управление (вектор реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты) ограничено по модулю. Необходимо минимизировать длительность процесса переориентации орбиты КА (или затраты характеристической скорости). Построен оригинальный эволюционный алгоритм нахождения траекторий оптимальных перелётов КА, в котором неизвестными величинами являются длительности участков активного движения КА. Приведены примеры численного решения задачи для случая, когда конечная ориентация орбиты КА соответствует ориентации орбиты одного из спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС. Построены графики изменения компонент кватерниона ориентации орбитальной системы координат, оптимального управления. Установлены особенности и закономерности процесса оптимальной переориентации орбиты КА.

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, оптимизация, ген.

I. A. Pankratov

G.N. Chernyshevsky National Research Saratov State University
Russia, Saratov, e-mail: pankratovia@info.sgu.ru

EVOLUTIONARY ALGORITHM FOR OPTIMIZING SPACECRAFT FLIGHTS BY DISCONTINUED CONTROL

The problem of optimal reorientation of spacecraft orbit is considered in quaternion formulation. Control (jet thrust vector orthogonal to the plane of the orbit) is limited in magnitude. It is necessary to minimize the duration of the process of reorientation of the spacecraft orbit (or the costs of characteristic velocity). Original evolutionary algorithm for finding the trajectories of spacecraft optimal flights is built. In this case the lengths of the active sections of the spacecraft motion are unknown. Examples of numerical solution of the problem for the case when the final orientation of the spacecraft's orbit corresponds to one of the satellites of GLONASS orbital grouping are given. The graphs of components of the quaternion of orientation of the orbital coordinate system, and optimal control are drawn. Specific features and regularities of the process of optimum reorientation of the spacecraft's orbit are given.

Keywords: spacecraft, orbit, optimization, gen.

Предположим, что вектор ускорения \mathbf{u} от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. Тогда орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве как неизменяемая (недеформируемая) фигура. Рассмотрим следующую задачу: пусть необходимо определить ограниченное по модулю управление \mathbf{u} , ортогональное плоскости орбиты КА:

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max}, \quad (1)$$

переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями [1]:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\lambda}{dt} &= \lambda \circ \omega_\eta, \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3, \quad \omega_\eta = u \frac{r}{c} \mathbf{i}_1 + \frac{c}{r^2} \mathbf{i}_3, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const}, \end{aligned} \quad (2)$$

из заданного начального положения

$$t = t_0 = 0 \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \lambda(0) = \Lambda^0 \circ (\cos(\varphi/2) + \mathbf{i}_3 \sin(\varphi/2)) \quad (3)$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t^* = ? \quad \varphi(t^*) = \varphi^* = ?, \quad \text{vect} \left[\tilde{\lambda}(t^*) \circ \Lambda^* \circ (\cos(\varphi^*/2) + \mathbf{i}_3 \sin(\varphi^*/2)) \right] = \mathbf{0}. \quad (4)$$

При этом необходимо минимизировать затраты времени или характеристической скорости [2].

Здесь λ – нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат в инерциальной системе координат; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона; \circ – символ кватернионного умножения; φ – истинная аномалия; r – модуль радиус-вектора \mathbf{r} центра масс КА; p и e – параметр и эксцентриситет орбиты, c – постоянная площадей; u – алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости орбиты КА; Λ – кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА); верхняя волна – символ сопряжения.

Известно, что кватернион Λ получается из кватерниона ориентации орбитальной системы координат с помощью поворота:

$$\Lambda = \lambda \circ \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

В данной задаче известны c, p, e, φ_0 , а также начальное и конечное значения кватерниона ориентации орбиты КА. Необходимо найти дли-

тельности участков движения КА (а также закон оптимального управления).

В работах [3, 4] поставленная задача решалась с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина [5]. В этой задаче нет формул для нахождения неизвестных начальных значений сопряжённых переменных. Начальные приближения для значений сопряжённых переменных плохо сходятся к тем значениям, которые доставляют нули функциям невязок из-за постоянного попадания в их локальные минимумы, где итерационные методы [6] не дают хороших результатов. Более того, при численном интегрировании уравнений (2) необходимо дополнительно уточнять положение точки переключения управления. В настоящей статье к решению этой задачи применён эволюционный алгоритм. Данный способ нахождения оптимальных траекторий перелётов КА не требует знания начальных значений сопряжённых переменных. Опишем основные этапы алгоритма, следуя книге [7].

Будем искать оптимальное управление в виде кусочно-постоянной функции. При этом её вид будет соответствовать оптимальному управлению, полученному после применения принципа максимума. Известно, что при решении задачи быстрогодействия оптимальное управление принимает лишь максимальные по модулю значения

$$u(t) = \begin{cases} u_{start}, & \text{если } 0 \leq t < t_1; \\ -u_{start}, & \text{если } t_1 \leq t < t_2; \\ u_{start}, & \text{если } t_2 \leq t < t_3; \\ \dots \\ (-1)^{M-1} u_{start}, & \text{если } t_{M-1} \leq t \leq t_M; \end{cases}$$

а при минимизации затрат характеристической скорости возможны участки пассивного движения КА [3, 4]:

$$u(t) = \begin{cases} u_{start}, & \text{если } 0 \leq t < t_1; \\ 0, & \text{если } t_1 \leq t < t_2; \\ -u_{start}, & \text{если } t_2 \leq t < t_3; \\ 0, & \text{если } t_3 \leq t < t_4; \\ u_{start}, & \text{если } t_4 \leq t < t_5; \\ \dots \end{cases}$$

Здесь $u_{start} \in \{-u_{max}; u_{max}\}$ – значение управления на первом участке активного движения КА; $\Delta_k = t_k - t_{k-1}$ – искомые величины (длительности участков движения КА). Количество участков движения КА M полагается заданным.

Введём безразмерные переменные по формулам $r = R \cdot r^b$, $t = T \cdot t^b$, $u = u_{\max} \cdot u^b$. Здесь R – характерное расстояние (величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА); $T = R^2 / c$ – характерное время. Компоненты кватерниона ориентации орбиты КА λ_j являются безразмерными. После элементарных преобразований система фазовых уравнений примет вид [8]

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\lambda}{dt} &= \lambda \circ \omega^b, & \omega^b &= N^b u^b r^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{(r^b)^2}, & r^b &= \frac{1}{1 + e \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $N^b = u_{\max} R^3 / c^2$ – характерный безразмерный параметр задачи.

Ограничение по управлению в безразмерном виде есть

$$-1 \leq u^b \leq 1.$$

Рассмотрим случай, когда орбита КА является круговой, при этом $e = 0$ ($r^b = 1$). Известно, что орбиты спутниковых группировок ГЛОНАСС и GPS близки к круговым. В этом случае ранее были найдены аналитические решения уравнений (2) (или (5)) для постоянного управления [8, 9]. На первом шаге необходимо случайным образом сгенерировать популяцию из N_{\max} пробных решений (особей). Особь – это набор из M вещественных чисел (длительностей участков движения КА). При этом вместо вещественного числа Δ_k в памяти хранится целое число u_k^{int} (ген), ($0 \leq u_k^{\text{int}} \leq 2^L - 1$). Связь между искомым вещественным числом и геном даётся формулой

$$\Delta_k = \frac{\Delta T_{\max} \cdot u_k^{\text{int}}}{2^L - 1},$$

где ΔT_{\max} – заданная максимальная длительность участка движения КА.

На втором шаге алгоритма для каждой особи находится по известной формуле [8]:

$$\begin{aligned} \lambda(t_k) &= \lambda(t_{k-1}) \circ \left(\cos \frac{\omega \Delta_k}{2} + \frac{1}{\omega} \omega^b \sin \frac{\omega \Delta_k}{2} \right), \\ \omega^b &= N^b u^b r^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3, & \omega &= |\omega^b|; \end{aligned} \quad (6)$$

значение кватерниона ориентации орбитальной системы координат в конечный момент времени $\lambda(t_M)$ с начальными условиями (2) (управление

(1) задаётся выбранной особью). Функция приспособленности (целевая функция) – модуль левой части (4). Чем меньше значение целевой функции, тем более приспособленной является особь, т.е. пробное решение, использованное в качестве аргумента целевой функции. Если на этом шаге для некоторой особи значение целевой функции меньше наперед заданного малого числа ε , то выполнение алгоритма заканчивается, а управление, соответствующее данной особи, выдаётся в качестве решения задачи.

На третьем шаге алгоритма остаётся половина особей, имеющих наименьшие (лучшие) значения целевой функции. Затем производится скрещивание особи с самым маленьким значением целевой функции со всеми остальными, в том числе и с самой собой методом промежуточной рекомбинации [7]. Потомки создаются по следующему правилу:

$$\text{Потомок} = \text{Родитель1} + \alpha \cdot (\text{Родитель2} - \text{Родитель1}).$$

Здесь α – случайное число на отрезке $[-0.25; 1.25]$.

Для каждого гена создаваемого потомка выбирается отдельный множитель α . Полученные гены потомка округляются до ближайших целых чисел, лежащих на отрезке $[0; 2^L - 1]$. В результате получается новая популяция из N_{\max} особей. Отметим, что если фиксировать α (например $\alpha = 0.5$), то алгоритм работает хуже. Либо алгоритм не находит решение (особь, для которой значение целевой функции меньше ε), либо для этого требуется больше итераций.

На четвёртом шаге алгоритма вычисляется среднее значение целевой функции для новой популяции. Если оно больше среднего значения целевой функции, вычисленной на втором шаге, то производится мутация особей в популяции: гены всех особей записываются в двоичном виде (на каждый ген отводится ровно L бит) и с вероятностью $p_{mut} \in [0; 1]$ производится инвертирование случайным образом выбранного бита каждого гена (в результате ген по-прежнему будет лежать на отрезке $[0; 2^L - 1]$). Затем осуществляется возврат ко второму шагу алгоритма.

Автором была составлена программа на языке Python, реализующая описанный выше алгоритм. Величины, характеризующие начальную и конечную ориентации орбиты КА, полагались равными: $\lambda_0^0 = -0.663730$, $\lambda_1^0 = 0.518734$, $\lambda_2^0 = -0.062608$, $\lambda_3^0 = -0.535217$; $\Lambda_0^* = -0.255650$, $\Lambda_1^* = -0.162241$, $\Lambda_2^* = 0.510764$, $\Lambda_3^0 = 0.804694$. Отличие ориентаций орбит по долготе восходящего узла, наклону, угловому расстоянию перигентра

от узла составляет единицы градусов. Кватернион конечной ориентации орбиты КА соответствует ориентации орбиты одного из спутников российской орбитальной группировки ГЛОНАСС.

Параметры алгоритма полагались равными: $L = 40$, $N_{\max} = 10000$, $p_{\min} = 0.9$, $N^b = 0.35$, $\Delta T_{\max} = 4.0$.

На рис. 1 приведены результаты решения задачи быстродействия, на рис. 2 – результаты решения задачи на минимум затрат характеристической скорости (на графиках все величины являются безразмерными, верхний индекс « b » для краткости опущен).

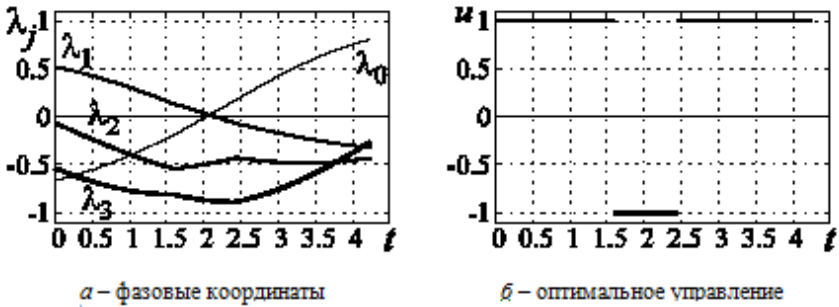


Рис. 1. Случай быстродействия, $M = 3$

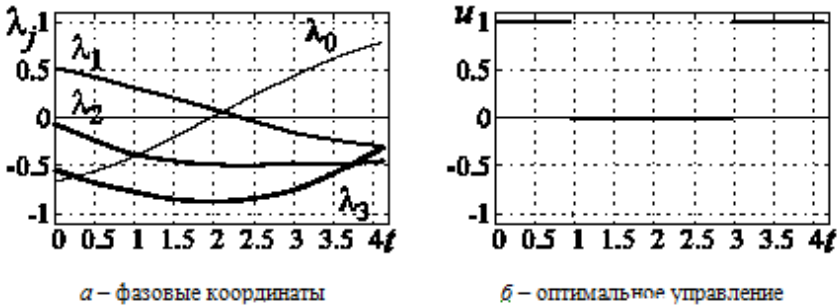


Рис. 2. Минимизация затрат характеристической скорости, $M = 5$

Описанный выше алгоритм необходимо применять неоднократно для разных начальных популяций. При этом будет получено несколько решений, из которых необходимо выбрать то, которое соответствует переориентации орбиты за меньшее время (или соответственно с меньшими затратами характеристической скорости).

В ходе численного решения задачи было установлено, что при смене знака управления на первом участке движения КА (а также при увеличении числа участков движения КА) затраты времени (или характеристической скорости) на переориентацию орбиты КА увеличиваются. Использование аналитических формул вместо численного интегрирования уравнений (2) методом Рунге-Кутты позволяет значительно ускорить работу алгоритма. При сохранении приемлемой длительности работы программы становится возможным на несколько порядков увеличить количество особей в популяции и быстрее найти решение задачи. Отметим, что длительности второго и третьего участков движения КА на рис. 2 на два порядка меньше длительностей остальных участков. Тем не менее, получить решение задачи с меньшим числом участков движения КА не удалось.

В дальнейшем предполагается модифицировать описанный в статье алгоритм так, чтобы оптимальное количество участков движения КА определялось в ходе решения задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле // *Космические исследования*. 2001. Т. 39, вып. 5. С. 502-517.
2. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / В.К. Абалакин, Е.П. Аксенов, Е.А. Гребенников [и др.]. М.: Наука, 1976. 864 с.
3. *Панкратов И.А.* Численное исследование задачи переориентации орбиты космического аппарата с использованием орбитальной системы координат / И.А. Панкратов, Я.Г. Сапунков, Ю.Н. Челноков // *Математика. Механика*. 2012. № 14. С. 132-136.
4. *Панкратов И.А.* Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат / И.А. Панкратов, Я.Г. Сапунков, Ю.Н. Челноков // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. Сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84-92.
5. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе [и др.]. М.: Наука, 1983. 393 с.
6. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
7. *Панченко Т.В.* Генетические алгоритмы / Т.В. Панченко. Астрахань: Издат. дом «Астраханский университет», 2007. 87 с.
8. *Панкратов И.А.* Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата / И.А. Панкратов, Ю.Н. Челноков // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. Сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 84-89.
9. *Панкратов И.А.* Аналитическое решение уравнений ориентации околокруговой орбиты космического аппарата // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. Сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 97-105.

УДК 517.925

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОКРУЖНОСТИ
БЕЗ ОСОБЫХ ТОЧЕК**

В работе изучаются дифференциальные уравнения второго порядка, правые части которых – полиномы степени $n \leq 3$ относительно первой производной с периодическими коэффициентами. Их фазовые портреты рассматриваются на цилиндре $S^1 \times \overline{\mathbb{R}}$, где $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ – двухточечная компактификация числовой прямой \mathbb{R} . Описываются разбиения множеств уравнений без особых точек степеней 1, 2 и 3 на классы топологической эквивалентности и их связные компоненты.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения второго порядка на окружности, полиномиальные дифференциальные уравнения, топологическая эквивалентность, предельный цикл, бифуркации.

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**ON POLINOMIAL SECOND ORDER
DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE CIRCLE
WITHOUT SINGULAR POINTS**

The paper studies differential equations of the second order, the right-hand sides of which are polynomials of degree $n \leq 3$ with respect to the first derivative with periodic coefficients. Their phase portraits are considered on the cylinder $S^1 \times \overline{\mathbb{R}}$, where $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ is the two-point compactification of \mathbb{R} . We describe partitions of sets of equations without singular points of degree 1, 2 and 3 into topological equivalence classes and their connected components.

Keywords: second order differential equations on the circle, polynomial differential equations, topological equivalence, limit cycle, bifurcations.

Введение. Будем рассматривать уравнения второго порядка вида

$$a: \ddot{x} = a_0(x) + a_1(x)\dot{x} + \dots + a_n(x)\dot{x}^n,$$

с непрерывно дифференцируемыми ω -периодическими функциями $a_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Мы можем считать, что уравнение задано на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} / \omega\mathbb{Z}$. Обозначим A_ω^n – множество таких уравнений. Пусть $C^1(\mathbb{S}^1)$ – банахово пространство непрерывно дифференцируемых ω -периодических функций с нормой $\|\varphi\|_{C^1} := \max_{x \in \mathbb{Y}} \{|\varphi(x)|, |\varphi'(x)|\}$.

Отождествив уравнение a со строкой (a_0, a_1, \dots, a_n) , мы отождествим A_ω^n с прямой суммой $n+1$ -го экземпляра $C^1(\mathbb{S}^1)$ с нормой $\|a\| = \max_{i \in \{0, 1, \dots, n\}} \|a_i\|_{C^1}$.

Пространство A_ω^k при $k < n$ можно рассматривать как подпространство A_ω^n . Обозначим \bar{A}_ω^k – открытое подмножество в A_ω^n , состоящее из уравнений, для которых $a_0(x) \neq 0$ при всех x . Оно состоит из двух связанных компонент

$${}^+ \bar{A}_\omega^k = \{a \in \bar{A}_\omega^k : \forall x \ a_0(x) > 0\} \quad \text{и} \quad {}^- \bar{A}_\omega^k = \{a \in \bar{A}_\omega^k : \forall x \ a_0(x) < 0\}.$$

Уравнение $a \in A_\omega^3$ определяет на $T\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + a_3(x)y^3, \end{cases} \quad (1)$$

которую будем также обозначать a . Если $a \in \bar{A}_\omega^3$, то эта система не имеет особых точек.

Обозначим $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ – двухточечную компактификацию \mathbb{R} . Превратим $\bar{\mathbb{R}}$ в одномерное C^∞ -многообразие с краем, взяв в качестве карт (\mathbb{R}, h_1) , $h_1(x) := x$, $((0, +\infty], h_2)$, $h_2(x) := 1/x$ при $x \in (0, +\infty)$ и $h_2(+\infty) := 0$, $([-\infty, 0), h_3)$, $h_3(x) := 1/x$ при $x \in (-\infty, 0)$ и $h_3(-\infty) := 0$.

В координатах $x, z = 1/y$ в $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$ и $\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$ система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = 1/z, \\ \dot{z} = -a_0(x)z^2 - a_1(x)z - a_2(x) - a_3(x)/z. \end{cases}$$

В областях $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$ и $\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$ она имеет те же (ориентированные) траектории, что и система уравнений, соответственно,

$$\bar{a}_+ : \begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{z} = -a_0(x)z^3 - a_1(x)z^2 - a_2(x)z - a_3(x) \end{cases}$$

и

$$\bar{a}_- : \begin{cases} \dot{x} = -1, \\ \dot{z} = a_0(x)z^3 + a_1(x)z^2 + a_2(x)z + a_3(x) \end{cases}$$

Но системы \bar{a}_+ и \bar{a}_- определены и при $z = 0$, то есть, соответственно, на $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty]$ и $\mathbb{S}^1 \times [-\infty, 0)$.

Для уравнений из A_ω^2 и A_ω^1 имеем, соответственно, $a_3(x) \equiv 0$ и $a_2(x) \equiv a_3(x) \equiv 0$. Поэтому кривые $\Gamma_+ := \mathbb{S}^1 \times \{+\infty\}$ и $\Gamma_- := \mathbb{S}^1 \times \{-\infty\}$, задаваемые в координатах x, z уравнением $z = 0$, являются траекториями, соответственно, систем \bar{a}_+ и \bar{a}_- . Будем их называть *бесконечно удаленными замкнутыми траекториями* уравнения $a \in A_\omega^2$ и $a \in A_\omega^1$. Возможные бифуркации Γ_+ и Γ_- описаны для уравнений из A_ω^1 в работах [1] и [2], а для уравнений из A_ω^2 в работах [3–5].

Ряд достаточных условий существования предельных циклов уравнений из A_ω^3 получен в [6] и [7].

Обозначим $\bar{\bar{A}}_\omega^3$ множество уравнений из \bar{A}_ω^3 таких, что $\forall x a_3(x) \neq 0$. Это условие означает отсутствие особых точек, принадлежащих Γ_\pm . Траектории уравнения $a \in \bar{\bar{A}}_\omega^3$ в $\mathbb{S}^1 \times \bar{\mathbb{R}}$ определим как замыкания в $\mathbb{S}^1 \times \bar{\mathbb{R}}$ траекторий системы (1). Множество $\bar{\bar{A}}_\omega^3$ состоит из 4 компонент ${}^{\pm, \pm} \bar{\bar{A}}_\omega^3$, где

$${}^{-, \pm} \bar{\bar{A}}_\omega^3 = \{a \in {}^{\pm} \bar{A}_\omega^3 : \forall x a_2(x) < 0\}, \quad {}^{+, \pm} \bar{\bar{A}}_\omega^3 = \{a \in {}^{\pm} \bar{A}_\omega^3 : \forall x a_2(x) > 0\}.$$

Будем говорить, что уравнения $a, \tilde{a} \in A_\omega^n$ ($n = 1, 2, 3$) *топологически эквивалентны* (в $\mathbb{S}^1 \times \bar{\mathbb{R}}$), если существует гомеоморфизм $h: \mathbb{S}^1 \times \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \bar{\mathbb{R}}$, $h(\mathbb{S}^1 \times \{+\infty\}) = \mathbb{S}^1 \times \{+\infty\}$, переводящий ориентированные траектории уравнения a в ориентированные траектории уравнения \tilde{a} .

Заметим, что замкнутые траектории уравнения a из \bar{A}_ω^1 ($\bar{A}_\omega^2, \bar{\bar{A}}_\omega^3$) совпадают с замкнутыми траекториями уравнения Абеля

$$\frac{dz}{dx} = -a_0(x)z^3 - a_1(x)z^2 - a_2(x)z - a_3(x). \quad (2)$$

Решение $z(x, u)$ уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию $z(0, u) = u$, аналитически зависит от u [8]. Поэтому, если $z = z(x, u_0)$ – замкнутая траектория, то $u \mapsto z(\omega, u)$ – аналитическая функция последования в некоторой окрестности точки u_0 . Следовательно, можно говорить о кратности замкнутой траектории. Согласно [9] и [10] сумма кратностей всех замкнутых интегральных кривых уравнения Абеля

с коэффициентом $a_3(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{S}^1$ не превосходит трех. Вследствие этого множества \bar{A}_ω^1 , \bar{A}_ω^2 и \bar{A}_ω^3 имеют достаточно простые разбиения на классы топологической эквивалентности и их связные компоненты. Мы их опишем ниже.

Отметим, что в статьях автора [11] и [12] были даны разбиения на классы топологической эквивалентности и их связные компоненты для приведенных уравнений Риккати $\dot{x} = x^2 + a_1(t)x + a_0(t)$ и Абеля $\dot{x} = x^3 + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t)$ с периодическими коэффициентами, также рассматриваемых на $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Идеи некоторых доказательств из этих статей мы используем и в настоящей работе.

1. Структура множества \bar{A}_ω^1 . Пусть $m_1(a) := \int_0^\omega a_1(x)dx$. Определим подмножества $\Sigma_p^0 = \Sigma_p^0 \bar{A}_\omega^1$ ($p = 1, 2, 3, 4$) в \bar{A}_ω^1 , положив

$$\Sigma_1^0 := \{a \in {}^+ \bar{A}_\omega^1 : m_1(a) < 0\}, \Sigma_2^0 := \{a \in {}^+ \bar{A}_\omega^1 : m_1(a) > 0\},$$

$$\Sigma_3^0 := \{a \in {}^- \bar{A}_\omega^1 : m_1(a) > 0\}, \Sigma_4^0 := \{a \in {}^- \bar{A}_\omega^1 : m_1(a) < 0\}.$$

Пусть также $\Sigma_1^1 := \{a \in {}^+ \bar{A}_\omega^1 : m_1(a) = 0\}$, $\Sigma_2^1 := \{a \in {}^- \bar{A}_\omega^1 : m_1(a) = 0\}$.

Теорема 1. 1. Классы топологической эквивалентности в $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ уравнений $a \in \bar{A}_\omega^1$ совпадают с множествами Σ_p^0 ($p = 1, 2, 3, 4$) и Σ_q^1 ($q = 1, 2$) (рис. 1). Уравнения из Σ_1^0 (Σ_2^0) имеют неустойчивый предельный цикл, принадлежащий $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$ ($\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$), и устойчивые предельные циклы Γ_+ и Γ_- . Уравнения из Σ_3^0 (Σ_4^0) имеют устойчивый предельный цикл, принадлежащий $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$ ($\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$), и неустойчивые предельные циклы Γ_+ и Γ_- . Уравнения из Σ_1^1 (Σ_2^1) имеют устойчивый цикл Γ_+ (Γ_-), неустойчивый цикл Γ_- (Γ_+) и не имеют других замкнутых траекторий.

2. Множества Σ_p^0 ($p = 1, 2, 3, 4$) открыты и связны.

3. Множества Σ_q^1 ($q = 1, 2$) – связные аналитические подмножества в \bar{A}_ω^1 коразмерности один.

4. Множество Σ_1^2 (Σ_2^2) – граница множеств Σ_1^0 и Σ_3^0 (Σ_2^0 и Σ_4^0).

Доказательство. Все утверждения теоремы, кроме связности Σ_p^0 и Σ_q^1 следуют из [1] и [2] или очевидны. Докажем линейную связность

Σ_p^0 ($p=1,2,3,4$). Возьмем уравнения $a^v \in \Sigma_p^0$: $\ddot{x} = a_0^v(x) + a_1^v(x)\dot{x}$, $v=0,1$. Очевидно, что линейный путь $a^\tau := (1-\tau)a^0 + \tau a^1$, $\tau \in [0,1]$, их связывающий, не выходит из Σ_p^0 . Точно также получаем линейную связность Σ_q^1 ($q=1,2$).

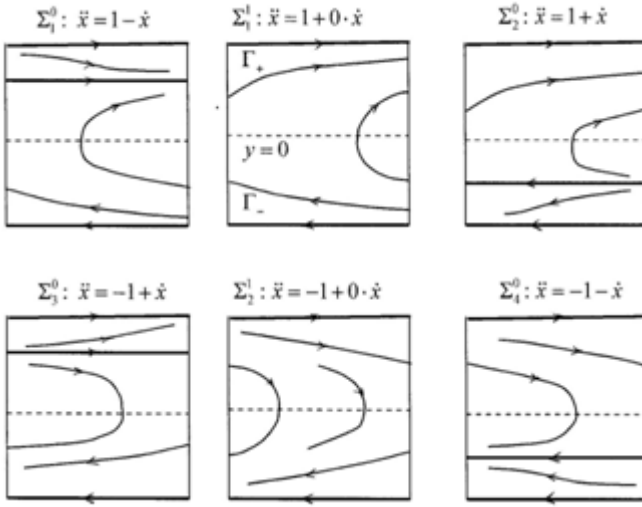


Рис. 1. Перестройки фазовых портретов уравнений из множества \bar{A}_o^1 .

Фазовое пространство $\mathbb{S}^1 \times \bar{\mathbb{R}}$ представлено в виде прямоугольника с отождествленными боковыми сторонами. Для каждого из множеств Σ_p^s указано стандартное уравнение из этого множества

2. Структура множества \bar{A}_o^2 . Для уравнения $a \in \bar{A}_o^2$ обозначим

$$m_2(a) := \int_0^{\infty} a_2(x) dx, \quad \ell(a) := -\int_0^{\infty} a_1(s) \exp \int_s^0 a_2(\sigma) d\sigma ds.$$

Согласно [4] при $m_2(a) > 0$ ($m_2(a) < 0$), а также при $m_2(a) = 0$, $\ell(a) = 0$ и $a \in {}^+ \bar{A}_o^2$ ($a \in {}^- \bar{A}_o^2$) Γ_+ – устойчивый (неустойчивый), а Γ_- – неустойчивый (устойчивый) предельные циклы, при $m_2(a) = 0$, а $\ell(a) < 0$ ($\ell(a) > 0$) Γ_+ и Γ_- – устойчивые (неустойчивые) предельные циклы.

Определим подмножества $\Sigma_p^s = \Sigma_p^s \bar{A}_o^2$ ($p=1,2,3,4; s=1,2$) и $\Sigma_1^2 = \Sigma_1^2 \bar{A}_o^2$ в ${}^+ \bar{A}_o^2$ следующими условиями (рис. 2):

$a \in \Sigma_1^0$, если $m_2(a) > 0$, и a не имеет в $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ замкнутых траекторий;
 $a \in \Sigma_2^0$ ($a \in \Sigma_4^0$), если $m_2(a) > 0$, и a имеет две замкнутые траектории, обе лежащие $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$ (в $\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$);

$a \in \Sigma_3^0$, если $m_2(a) > 0$ и a имеет в $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$ и $\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$ по одной замкнутой траектории;

$a \in \Sigma_1^1$ ($a \in \Sigma_4^1$), если $m_2(a) > 0$ и a имеет единственную замкнутую траекторию – двойной цикл, принадлежащий $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$ ($\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$);

$a \in \Sigma_2^1$ ($a \in \Sigma_3^1$), если $m_2(a) = 0$, $\ell(a) > 0$ ($\ell(a) < 0$) и a имеет в $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$ (в $\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$) замкнутую траекторию;

$a \in \Sigma_1^2$, если $m_2(a) = 0$ и $\ell(a) = 0$.

Определим также подмножества $\Sigma_p^s = \Sigma_p^s \bar{A}_\omega^2$ ($p = 5, 6, 7, 8; s = 1, 2$) и $\Sigma_2^2 = \Sigma_2^2 \bar{A}_\omega^2$ в \bar{A}_ω^2 как образы множеств Σ_{p-4}^s ($p = 1, 2, 3, 4; s = 1, 2$) и Σ_1^2 при отображении $a \mapsto -a$.

Для уравнения $a \in \Sigma_1^2$ ($a \in \Sigma_2^2$) Γ_+ (Γ_-) – устойчивый (неустойчивый) тройной предельный цикл; других замкнутых траекторий уравнение не имеет.

Теорема 2. 1. Классы топологической эквивалентности в $\mathbb{S}^1 \times \bar{\mathbb{R}}$ уравнений $a \in \bar{A}_\omega^2$ совпадают с множествами $\Sigma_1^0 \cup \Sigma_1^1$, $\Sigma_5^0 \cup \Sigma_2^2$, Σ_p^0 ($p = 2, 3, \dots, 8$) и Σ_q^1 ($q = 1, 2, \dots, 8$).

2. Множества Σ_p^0 ($p = 1, \dots, 8$) открыты и связны.

3. Множества Σ_p^1 ($p = 1, \dots, 8$) – связные аналитические подмногообразия в \bar{A}_ω^2 коразмерности один.

4. Множества Σ_k^2 ($k = 1, 2$) – связные аналитические подмногообразия в \bar{A}_ω^2 коразмерности два.

5. Множества Σ_q^1 ($q = 1, 2, 3, 5, 6, 7$), Σ_4^1 , Σ_8^1 принадлежат соответственно границам множеств Σ_q^0 и Σ_{q+1}^0 , Σ_4^0 и Σ_1^0 , Σ_8^0 и Σ_5^0 . Множество Σ_1^2 (Σ_2^2) принадлежит границе множеств Σ_p^1 , $p = 1, 2, 3, 4$ ($p = 5, 6, 7, 8$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем линейную связность множества Σ_1^0 . Возьмем в Σ_1^0 любое уравнение $a: \ddot{x} = a_0(x) + a_1(x)\dot{x} + a_2(x)\dot{x}^2$. Выберем положительное число N , удовлетворяющее неравенству

$$N > \max_{0 \leq v \leq 1} \max_{0 \leq x \leq \omega} [(1 - \mu)a_2(x) - (1 - \mu)^2 a_1^2(x) / 4(\mu + (1 - \mu)a_0(x))].$$

Тогда

$$(\mu + (1 - \mu)a_0(x)z^2 + (1 - \mu)a_1(x)z + (1 - \mu)a_2(x)) > N \quad \forall x, z \in \mathbb{R}, \mu \in [0, 1]. \quad (3)$$

Рассмотрим семейство уравнений

$$a^\mu : \ddot{x} = a_0(x) + a_1(x)\dot{x} + (a_2(x) + \mu N)\dot{x}^2, \quad \mu \in [0, 1]$$

и соответствующее семейство уравнений Абеля

$$A^\mu : dz/dx = -a_0(x)z^3 - a_1(x)z^2 - (a_2(x) + \mu N)z.$$

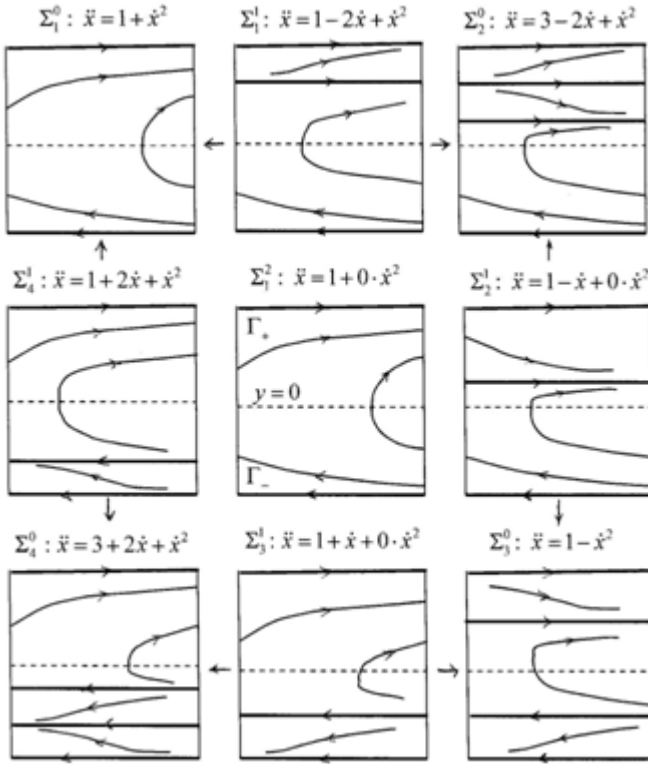


Рис. 2. Перестройки фазовых портретов уравнений из компоненты ${}^+ \bar{A}_\infty^2$ множества \bar{A}_∞^2 . Стрелки от множеств Σ_p^q указывают, в границы каких множеств Σ_q^0 они входят. Для получения фазовых портретов уравнений из компоненты ${}^- \bar{A}_\infty^2$ следует изменить направление стрелок на траекториях и увеличить нижний номер Σ_p^s на 4; соответственно в стандартном уравнении надо сменить знак правой части

Пусть $z = z(x, u, \mu)$ – максимальное решение уравнения A^μ , удовлетворяющее начальному условию $z(0, u, \mu) = u$. Оно аналитически зависит от u, μ .

При любом $\mu \in [0, 1]$ Γ_+ (Γ_-) – устойчивая (неустойчивая) замкнутая траектория a^μ . Покажем, что любым $\mu \in [0, 1]$ a^μ не имеет других замкнутых траекторий и потому принадлежит Σ_1^0 . Обозначим M множество тех $\mu \in [0, 1]$, для которых $a^\mu \in \Sigma_1^0$. Множество M открыто в $[0, 1]$ и содержит нуль, поскольку $a^0 = a$. Если $[0, 1] \setminus M$ не пусто, то оно содержит наименьший элемент $\mu_0 > 0$. Уравнение a^{μ_0} имеет замкнутую траекторию. Соответственно, уравнение A^{μ_0} имеет периодическое решение $z = z(x, u_0, \mu)$. Для определенности, пусть $u_0 > 0$. Случай $u_0 < 0$ рассматривается аналогично. Решения $z = z(x, u, \mu)$ при $u \in (0, +\infty)$ определены для $x \in [0, +\infty)$ и положительны. Функция $P(\cdot, \mu) = z(\omega, \cdot, \mu)$ является функцией последования, при этом $P(u_0, \mu) = u_0$. Производная $z'_\mu(x, u_0, \mu_0)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx} z'_\mu = b(x)z'_\mu - Nz(x, u_0, \mu_0),$$

где $b(x)$ – некоторая аналитическая функция, явное выражение которой нам не понадобится, и начальному условию $z'_\mu(0, u_0, \mu_0) = 0$. Следовательно,

$$P'_\mu(u_0, \mu_0) = -N \int_0^\omega z(x, u_0, \mu_0) \exp \int_s^\omega b(\tau) d\tau ds < 0.$$

Поэтому найдется такое $\varepsilon \in (0, \mu_0)$, что для $\mu \in (\mu_0 - \varepsilon, \mu_0)$ $P(u_0, \mu) > u_0$. При $\mu \in (\mu_0 - \varepsilon, \mu_0)$ $m_2(a^\mu) = m_2(a) + \mu\omega N > 0$ и потому Γ_+ устойчива. Следовательно, $P(u_1, \mu) < u_1$ для некоторого $u_1 \in (0, u_0)$. Но тогда $P(\cdot, \mu)$ имеет на (u_1, u_0) неподвижную точку, а уравнение a^μ замкнутую траекторию в $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$, в противоречие с выбором μ_0 . Таким образом, $M = [0, 1]$, то есть $\forall \mu \in [0, 1]$ $a^\mu \in \Sigma_1^0$.

Рассмотрим теперь семейство уравнений

$$a_*^\mu : \ddot{x} = (\mu + (1 - \mu)a_0(x)) + (1 - \mu)a_1(x)\dot{x} + ((1 - \mu)a_2(x) + N)\dot{x}^2, \quad \mu \in [0, 1]$$

и соответствующее семейство уравнений Абеля

$$A_*^\mu : \frac{dz}{dx} = -(\mu + (1-\mu)a_0(x))z^3 - (1-\mu)a_1(x)z^2 - ((1-a_2(x) + N)z).$$

Ввиду (3) любое ненулевое решение уравнения A_*^μ при $\mu \in [0,1]$ является или возрастающей или убывающей функцией. Поэтому уравнения a_*^μ , $\mu \in [0,1]$, не имеют замкнутых траекторий в $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Ясно, что $\forall \mu \in [0,1]$ уравнение $a_*^{\mu} : \ddot{x} = 1 + (\mu + (1-\mu)N)\dot{x}^2$ принадлежит Σ_1^0 .

Поскольку $a^0 = a$, $a_*^0 = a^1$ и $a_*^0 = a_*^1$, то произвольное уравнение $a \in \Sigma_1^0$ можно соединить путем в Σ_1^0 с уравнением $a_*^1 : \ddot{x} = 1 + \dot{x}^2$. Следовательно, Σ_1^0 – линейно связно.

Докажем линейную связность множества Σ_2^0 . Возьмем произвольное уравнение $a \in \Sigma_2^0$. Пусть

$$A : dz/dx = -a_0(x)z^3 - a_1(x)z^2 - a_2(x)z \quad (4)$$

– соответствующее ему уравнение Абеля, а $z = q_i(x)$ ($i=1,2$) – его положительные ω -периодические решения, причем для любого $x \in [0, \omega]$ $q_1(x) < q_2(x)$. Замена $z - q_1(x) \mapsto z$ переводит уравнение A в уравнение

$$A_* : dz/dx = -a_0(x)z^3 + b_1(x)z^2 + b_2(x)z$$

с непрерывными ω -периодическими коэффициентами $b_1(x)$ и $b_2(x)$ и тремя ω -периодическими решениями

$$z = -q_1(x) < 0, \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = q_2(x) - q_1(x) > 0,$$

причем второе имеет положительный характеристический показатель, а первое и третье отрицательный характеристический показатель.

Рассмотрим семейство уравнений Абеля

$$A_*^\mu : \frac{dz}{dx} = -((1-\mu)a_0(x) + 1)z^3 + (1-\mu)b_1(x)z^2 + (\mu + (1-\mu)b_2(x))z, \quad \mu \in [0,1].$$

Так как периодическое решение $z = 0$ уравнения $A_*^0 = A_*$ имеет характеристический показатель $\omega^{-1} \int_0^\omega b_2(x) dx > 0$, то и характеристический показатель решения $z = 0$ уравнения A_*^μ при любом $\mu \in [0,1]$

$$\omega^{-1} \int_0^\omega (\mu + (1-\mu)b_2(x)) dx = \mu + (1-\mu)\omega^{-1} \int_0^\omega b_2(x) dx > 0.$$

Уравнение A_*^μ имеет ω -периодические решения $z = p_1(x, \mu) < 0$ и $z = p_2(x, \mu) > 0$, где p_i ($i = 1, 2$) – C^1 -функции,

$$p_1(x, 0) = -q_1(x). \quad (5)$$

Сделаем в уравнении A_*^μ замену $z - p_1(x, \mu) \mapsto z$, получим уравнение

$$A_{**}^\mu : dz/dx = -((1-\mu)a_0(x)+1)z^3 - c_1(x, \mu)z^2 - c_2(x, \mu)z,$$

непрерывными коэффициентами, ω -периодическими по x , имеющее при любом $\mu \in [0, 1]$ ω -периодическое решение $z = 0$ с характеристическим показателем $-\omega^{-1} \int_0^\omega c_2(x, \mu) dx < 0$ и два положительных ω -периодических решения. Рассмотрим соответствующее семейство уравнений A_{**}^μ семейство уравнений

$$a_{**}^\mu \in A_\omega^2 : \ddot{x} = ((1-\mu)a_0(x)+1) + c_1(x, \mu)\dot{x} + c_2(x, \mu)\dot{x}^2.$$

Так как $\forall \mu \in [0, 1]$ $m_2(a_{**}^\mu) = \int_0^\omega c_2(x, \mu) dx > 0$ и $(1-\mu)a_0(x)+1 > 0$ при всех $x \in [0, \omega]$, то $a_{**}^\mu \in \Sigma_2^0$. Ввиду (5) $a_{**}^0 = a$. При $\mu = 1$ получаем $A_*^1 : dz/dx = -z^3 + z$, $p_1(x, 1) = -1$, $A_{**}^1 : dz/dx = -z^3 + 3z^2 - 2z$ и $a_{**}^1 : \ddot{x} = 2 - 3\dot{x} + \dot{x}^2$. Таким образом, любое уравнение $a \in \Sigma_2^0$ соединяется путем в Σ_2^0 с уравнением $\ddot{x} = 2 - 3\dot{x} + \dot{x}^2$, и потому Σ_2^0 линейно связно. Линейная связность Σ_3^0 доказывается аналогично.

Докажем линейную связность множества Σ_4^0 . Пусть $a^0, a^1 \in \Sigma_4^0$. Рассмотрим, линейный путь $a^\mu := (1-\mu)a^0 + \mu a^1$, $\mu \in [0, 1]$, связывающий эти уравнения. Так как $\forall \mu \in [0, 1]$ $m_2(a^\mu) = (1-\mu)m_2(a^0) + \mu m_2(a^1) > 0$, $\bar{a}_0(a^\mu) < 0$, то $a^\mu \in \Sigma_2^0$.

Покажем, что Σ_1^1 – связное аналитическое подмногообразие коразмерности один.

Пусть $z = Z(x, u, a)$ – решение уравнения Абеля (4), соответствующего уравнению $a \in \bar{A}_\omega^2$, и удовлетворяющее начальному условию $Z(0, u, a) = u$. Оно определено для $x \in [0, \omega]$. Покажем, что отображение

$$\mathbb{R} \oplus \bar{A}_\omega^2 \ni (u, a) \mapsto Z(\cdot, u, a) \in C^1[0, \omega] \quad (6)$$

является аналитическим. Следуя идее из [14, с. 235–236], сведем задачу к теореме о неявной функции. Определим отображение

$$F : C^1[0, \omega] \oplus \mathbb{R} \oplus \bar{A}_\omega^2 \rightarrow C^1[0, \omega],$$

положив $F(z(\cdot), u, a) = w(\cdot)$, где

$$\forall x \in [0, \omega] \quad w(x) = z(x) - u + \int_0^x [a_0(s)z^3(s) + a_1(s)z^2(s) + a_2(s)z(s)] ds.$$

Отображение F является суммой k -степенных отображений [13, с. 378] с $k \leq 4$, и потому аналитическим. Функция $z(\cdot) \in C^1[0, \omega]$ тогда и только тогда является решением уравнения $F(z(\cdot), u, a) = 0$, когда $\forall x \in [0, \omega] \quad z(x) = Z(x, u, a)$.

Для любых $(u, a) \in \mathbb{R} \oplus \bar{A}_\omega^2$ производная

$$F'_z(Z(\cdot, u, a), u, a) : C^1[0, \omega] \rightarrow C^1[0, \omega]$$

является изоморфизмом. Действительно,

$$\begin{aligned} F'_z(Z(\cdot, u, a), u, a)h(x) &= \\ &= h(x) + \int_0^x [3a_0(s)Z^2(s, u, a) + 2a_1(s)Z(s, u, a) + a_2(s)]h(s)ds, \end{aligned}$$

и для любой функции $g \in C^1[0, \omega]$ уравнение $F'_z(Z(\cdot, u, a), u, a)h = g$ равносильно задаче Коши

$$h'(x) + [3a_0(x)Z^2(x, u, a) + 2a_1(x)Z(x, u, a) + a_2(x)]h(x) = g'(x), \quad h(0) = g(0),$$

имеющей единственное решение $h \in C^1[0, \omega]$.

По теореме о неявной функции [13, с. 426] получаем, что отображение (6) является аналитическим. Поэтому аналитической является и функция $P(u, a) = Z(\omega, u, a)$.

Уравнения Абеля, соответствующее уравнению $a^0 \in \Sigma_1^1$, имеет двукратное периодическое решение $z = Z(x, u_0, a^0)$, $u_0 > 0$. Для функции последования $u \mapsto P(u, a)$ это означает, что

$$P(u_0, a^0) = u_0, \quad P'_u(u_0, a^0) - 1 = 0, \quad P''_{uu}(u_0, a^0) < 0.$$

По теореме о неявной функции в некоторой окрестности V уравнения a^0 определена единственная аналитическая функция $\tilde{u}(\cdot)$ такая, что $\forall a \in V \quad P'_u(\tilde{u}(a), a) = 1$, а $\tilde{u}(a^0) = u_0$. Определим аналитическую функцию $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, положив $f(a) := P(u(a), a) - u(a)$.

Пусть $h \in A_\omega^2 : \ddot{x} = -x$. Обозначим $\zeta(x, u, \tau) := Z(x, u, a^0 + \tau h)$. Производная $\zeta'_\tau(x, u_0, 0)$, $x \in [0, \omega]$, удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx} \zeta'_\tau = b(x) \zeta'_\tau + Z(x, u_0, a^0),$$

где $b(x)$ – некоторая непрерывная функция, и начальному условию $\zeta'_\tau(0, u_0, 0) = 0$. Поэтому

$$\zeta'_\tau(\omega, u_0, 0) = \int_0^\omega Z(x, u_0, a^0) \exp \int_x^\omega b(s) ds dx.$$

Поскольку $P'_u(u_0, a^0) - 1 = 0$ и $\forall x \in [0, \omega] \quad Z(x, u_0, a^0) > 0$, то

$$f'(a^0)h = \frac{d}{d\tau} f(a^0 + \tau h) \Big|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau} P(u_0, a^0 + \tau h) \Big|_{\tau=0} = \zeta'_\tau(\omega, u_0, 0) > 0,$$

и, следовательно, $f'(a^0) \neq 0$. Если $W \subset V$ – достаточно малая окрестность уравнения a^0 , то

$$\forall a \in W \quad f'(a) \neq 0, \quad \{a \in W : f(a) = 0\} = V \cap \Sigma_1^1,$$

и потому Σ_1^1 – аналитическое подмногообразие коразмерности один в \bar{A}_ω^2 .

Доказательство линейной связности Σ_1^1 аналогично доказательству линейной связности Σ_2^0 .

То, что Σ_3^1 и Σ_4^1 – подмногообразия коразмерности один, а Σ_2^2 и Σ_2^2 подмногообразия коразмерности два, доказано, соответственно, в [4] и [3]. Легко проверить, что любые два уравнения из Σ_3^1 (соответственно, из Σ_4^1 , Σ_2^2 и Σ_2^2) можно связать линейным путем в Σ_3^1 (соответственно, в Σ_4^1 , Σ_2^2 и Σ_2^2). Так что эти подмногообразия связны.

Все утверждения теоремы для Σ_q^0 , Σ_q^1 ($q = 5, \dots, 8$) следуют из соответствующих утверждений для Σ_p^0 , Σ_p^1 ($p = 1, \dots, 4$).

3. Структура множества \bar{A}_ω^3 . Определим подмножества $\Sigma_p^k = \Sigma_p^k \bar{A}_\omega^3$ ($p = 1, 2, \dots, 12; k = 0, 1$). $\Sigma_q^2 = \Sigma_q^2 \bar{A}_\omega^3$ ($q = 1, 2, 3, 4$) в \bar{A}_ω^3 следующими условиями:

$$\Sigma_p^k \subset {}^{++} \bar{A}_\omega^2 \text{ при } p = 1, 2, 3; \quad \Sigma_p^k \subset {}^{--} \bar{A}_\omega^2 \text{ при } p = 4, 5, 6; \quad \Sigma_1^2 \subset {}^{++} \bar{A}_\omega^2, \\ \Sigma_2^2 \subset {}^{--} \bar{A}_\omega^2; \text{ и, кроме того,}$$

$a \in \Sigma_1^0$ ($a \in \Sigma_4^0$), если a имеет две замкнутые траектории в $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$ (в $\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$) и одну в $\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$ (в $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$);

$a \in \Sigma_2^0$ ($a \in \Sigma_5^0$), если a имеет единственную, причем грубую, замкнутую траекторию, которая принадлежит $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$ ($\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$);

$a \in \Sigma_3^0$ ($a \in \Sigma_6^0$), если a имеет три замкнутые траектории, лежащие в $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$ (в $\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$);

$a \in \Sigma_1^1$ ($a \in \Sigma_4^1$), если a имеет одну замкнутую траекторию в $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$ (в $\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$), являющуюся двойным циклом, и одну замкнутую траекторию в $a \in \Sigma_2^1$ ($a \in \Sigma_3^1$), если a имеет две замкнутые траектории – двойной цикл, принадлежащий $\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$ и грубую траекторию, лежащую в кольце между двойным циклом и $\mathbb{S}^1 \times \{-\infty\}$ ($\mathbb{S}^1 \times \{0\}$);

$a \in \Sigma_3^1$ ($a \in \Sigma_6^1$), если a имеет две замкнутые траектории – двойной цикл, принадлежащий $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$, и грубую траекторию, лежащую в кольце между двойным циклом и $\mathbb{S}^1 \times \{+\infty\}$ ($\mathbb{S}^1 \times \{0\}$);

$a \in \Sigma_1^0$ ($a \in \Sigma_4^0$), если a имеет единственную замкнутую траекторию – тройной цикл, принадлежащий $\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$ ($\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$).

Множества Σ_p^k ($p = 7, \dots, 12; k = 0, 1$) и Σ_q^2 ($q = 3, 4$) получаются из множеств Σ_{p-6}^k и Σ_{q-2}^2 при отображении $a \mapsto -a$.

Теорема 3. 1. Классы топологической эквивалентности в $\mathbb{S}^1 \times \bar{\mathbb{R}}$ уравнений $a \in \bar{\bar{A}}_\omega^3$ совпадают с множествами $\Sigma_2^0 \cup \Sigma_1^2$, $\Sigma_5^0 \cup \Sigma_2^2$, $\Sigma_8^0 \cup \Sigma_3^2$, $\Sigma_{11}^0 \cup \Sigma_4^2$, Σ_1^0 , Σ_3^0 , Σ_5^0 , Σ_6^0 , Σ_7^0 , Σ_9^0 , Σ_{10}^0 , Σ_{12}^0 и Σ_p^1 ($p = 1, 2, \dots, 12$) (рис. 3).

2. Множества Σ_p^0 ($p = 1, \dots, 12$) открыты и связны.

3. Множества Σ_p^1 ($p = 1, \dots, 12$) – связные аналитические подмногообразия в $\bar{\bar{A}}_\omega^3$ коразмерности один.

4. Множества Σ_q^2 ($q = 1, 2, 3, 4$) – связные аналитические подмногообразия в $\bar{\bar{A}}_\omega^3$ коразмерности два.

5. Границы множеств Σ_p^s ($p = 1, \dots, 12; s = 1, 2$) указаны на рис. 3.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2. Мы его опустим.

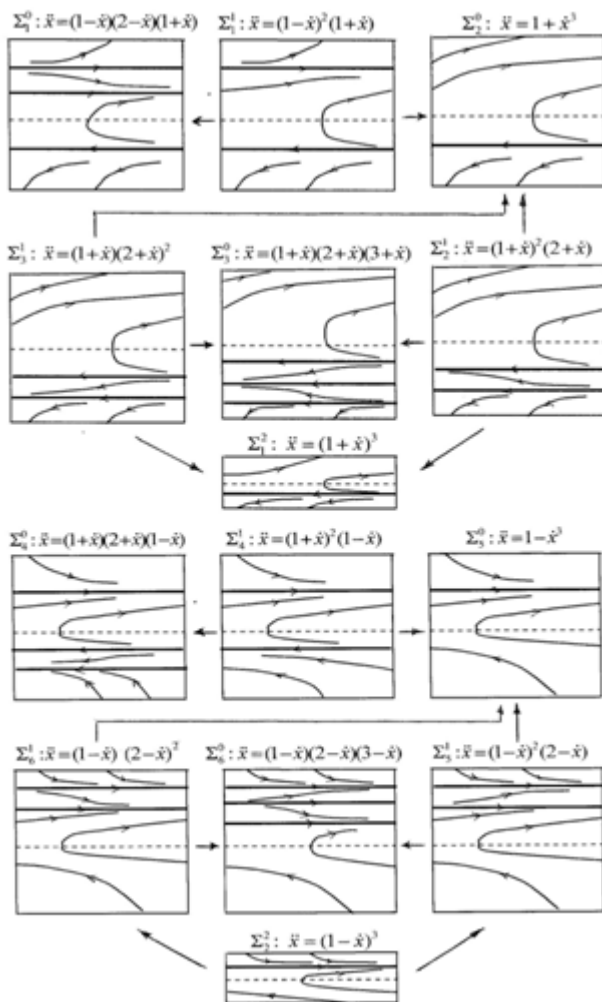


Рис. 3. Перестройки фазовых портретов уравнений из компонент ${}^{++}\bar{\bar{A}}_o^2$ и ${}^{--}\bar{\bar{A}}_o^2$ множества $\bar{\bar{A}}_o^3$. Стрелки от Σ_i^s к Σ_j^{s-1} означают, что Σ_i^s принадлежит границе Σ_j^{s-1} . Для получения фазовых портретов уравнений из компонент ${}^{++}\bar{\bar{A}}_o^2$ и ${}^{--}\bar{\bar{A}}_o^2$ следует изменить направление стрелок на траекториях и увеличить номер Σ_p^0 и Σ_p^1 на 6, а номер Σ_q^2 на 2; соответственно в стандартном уравнении надо сменить знак правой части.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ройтенберг В.Ш.* Об уравнениях Лъенара на окружности // Труды X междунар. Колмогоровских чтений: сб. ст. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2012. С. 83-85.
2. *Ройтенберг В.Ш.* О предельных циклах уравнений Лъенара с периодическими коэффициентами // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. 2013. Т. 1. С. 5-7.
3. *Ройтенберг В.Ш.* О рождающихся из бесконечности предельных циклах одного дифференциального уравнения второго порядка на окружности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 2. С. 6–15. DOI: 10.18384/2310-7351-2017-2-6-15.
4. *Ройтенберг В.Ш.* О предельных циклах одного дифференциального уравнения второго порядка на окружности // Науч.-техн. вестник Поволжья. 2017. № 1. С. 25-28.
5. *Ройтенберг В.Ш.* О рождающихся из бесконечности предельных циклах одного дифференциального уравнения второго порядка на окружности // Науч.-техн. вестник Поволжья. 2017. № 3. С. 28-30. DOI: 10.24153/2079-5920-2017-7-3-28-30.
6. *Ройтенберг В.Ш.* О полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. 2017. Т. 1. С. 3-6.
7. *Ройтенберг В.Ш.* О предельных циклах дифференциального уравнения второго порядка на окружности, правые части которых полиномы относительно производной // Труды ФОРА. 2017, № 22. С. 13-17.
8. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной лит-ры. 1961. 387 с.
9. *Плисс В.А.* О числе периодических решений уравнений с полиномиальной правой частью // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 5. С. 965-968.
10. *Casull A.* Limit cycles for generalized Abel equations / A. Casull, A. Guillamon // J. Bifurcation and Chaos. 2006. V. 16. P. 3737-3745.
11. *Ройтенберг В.Ш.* Об уравнениях Риккати с периодическими коэффициентами // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. 2013. Т. 1. С. 7-9.
12. *Ройтенберг В.Ш.* О структуре пространства уравнений Абеля // Ярославский педагогический вестник. 2013. Т. 3 (Естественные науки), № 3. С. 84-89.
13. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
14. *Люстерник Л.А.* Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Высшая школа, 1982. 271 с.

УДК 517.926+515.1

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

О ТИПИЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДЕЙСТВИЯХ \mathbb{R}^2 НА \mathbb{R}^4

В статье описано множество, открытое и всюду плотное в топологическом пространстве всех линейных действий \mathbb{R}^2 на \mathbb{R}^4 , состоящее из грубых действий.

Ключевые слова: линейное действие группы \mathbb{R}^2 , вполне интегрируемое дифференциальное уравнение, топологическая эквивалентность действий, грубые действия.

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

ON GENERIC LINEAR ACTIONS OF \mathbb{R}^2 ON \mathbb{R}^4

The paper describes a set that is open and everywhere dense in the topological space of all linear actions of \mathbb{R}^2 on \mathbb{R}^4 consisting of structurally stable actions.

Keywords: linear actions of the group \mathbb{R}^2 , completely integrable differential equation, topological equivalence of actions, structurally stable actions.

1. Постановка задач. Формулировки результатов. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$X : dx = A_1 x dt_1 + A_2 x dt_2$$

для функции $x(\cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $A_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2$) – линейные операторы, удовлетворяющее условию $A_1 A_2 = A_2 A_1$. Вследствие этого условия уравнение вполне интегрируемо [1]: для любого $x^0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение $x = e^{A_1 t_1 + A_2 t_2} x^0$, $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x|_{t=0} = x^0$. Решения определяют линейное действие группы \mathbb{R}^2 на \mathbb{R}^n (линейную динамическую систему с двумерным временем $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$) – гомоморфизм

$$t = (t_1, t_2) \mapsto L^t = e^{A_1 t_1 + A_2 t_2} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

группы \mathbb{R}^2 в группу обратимых линейных отображений \mathbb{R}^n . Множество точек $x = L^t x^0$, $t \in \mathbb{R}^2$, называется *траекторией, начинающейся в точке* x^0 , или *орбитой точки* x^0 .

Множество всех вполне интегрируемых линейных уравнений рассматриваемого вида, а также множество всех линейных действий группы \mathbb{R}^2 в \mathbb{R}^n будем обозначать $LE_{n,2}$. Пусть $|\cdot|$ – какая-нибудь норма в \mathbb{R}^n , $\|\cdot\|_L$ – операторная норма в пространстве $L(\mathbb{R}^n)$ линейных операторов в \mathbb{R}^n , согласованная с нормой $|\cdot|$, а $\|\cdot\|$ – норма в пространстве $L(\mathbb{R}^n) \oplus L(\mathbb{R}^n)$, индуцированная нормой $\|\cdot\|_L$. Зададим на множестве $LE_{n,2}$ топологию, определяемую нормой $\|\cdot\|$. От выбора нормы $|\cdot|$ эта топология не зависит.

Уравнения X и X_* из $LE_{n,2}$ топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, переводящий траектории уравнения X в траектории уравнения X_* .

Уравнение $X \in LE_{n,2}$ является *грубым* (относительно $LE_{n,2}$), если существует такая его окрестность $U(X)$ в $LE_{n,2}$, что уравнение X и любое уравнение $\tilde{X} \in U(X)$ топологически эквивалентны.

Предположим, что \mathbb{R}^n можно представить в виде прямой суммы одномерных подпространств E_1, \dots, E_m ($0 \leq m \leq n$) и двумерных подпространств E_{m+1}, \dots, E_{m+l} ($m + 2l = n$), инвариантных для обоих операторов A_k ($k = 1, 2$) так, что $A_k|_{E_p}$ ($1 \leq p \leq m$) имеет действительное собственное значение λ_p^k , а $A_k|_{E_{m+j}}$ ($1 \leq j \leq l$) пару комплексных сопряженных значений $\lambda_{m+j}^k \pm \mu_{m+j}^k i$, где хотя бы одно число μ_{m+j}^1 или μ_{m+j}^2 отлично от нуля. Обозначим $\Sigma^0 LE_{n,2}$ множество тех уравнений, для которых 2-векторы $\lambda_j := (\lambda_j^1, \lambda_j^2)$, $j \in \{1, 2, \dots, m+l\}$, попарно линейно независимы, то есть

$$\text{при всех } i, j \in \{1, 2, \dots, m+l\}, i \neq j \quad \delta_{ij} := \begin{vmatrix} \lambda_i^1 & \lambda_j^2 \\ \lambda_i^2 & \lambda_j^1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

и, кроме того, при каждом $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ комплексные числа $\lambda_{m+j}^1 \pm \mu_{m+j}^1 i$ и $\lambda_{m+j}^2 \pm \mu_{m+j}^2 i$ линейно независимы над полем действительных чисел, то есть $\lambda_{m+j}^1 \mu_{m+j}^2 - \lambda_{m+j}^2 \mu_{m+j}^1 \neq 0$.

В работе Н.Н. Ладиса [2] утверждается, что при дополнительном предположении о том, что векторы $(\lambda_j^1, \lambda_j^2)$, $j \in \{1, 2, \dots, m+l\}$, лежат по одну сторону от прямой, проходящей через начало координат, уравнение является грубым, а также приводится топологическая классификация таких уравнений. Если указанное дополнительное условие не выполняется, в [2] показано, что при $n = 2s$, $s \geq 3$, грубые уравнения не плотны в $LE_{n,2}$. Поэтому типичности грубых уравнений можно ожидать только в малых размерностях. При $n = 3$ в [3] показано, что $\Sigma^0 LE_{3,2}$ совпадает с множеством всех грубых уравнений и всюду плотно, дана топологическая классификация грубых уравнений, описаны компоненты связности $\Sigma^0 LE_{3,2}$.

В настоящей работе мы рассмотрим случай $n = 4$. Имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. Множество $\Sigma^0 LE_{4,2}$ открыто и всюду плотно в $LE_{4,2}$.

Теорема 2. Множество $\Sigma^0 LE_{4,2}$ состоит из грубых уравнений.

Доказательство теоремы 1 приведено в параграфе 2, теоремы 2 в параграфе 3.

2. Плотность $\Sigma^0 LE_{4,2}$ в $LE_{4,2}$. Докажем теорему 1.

Открытость $\Sigma^0 = \Sigma^0 LE_{4,2}$ следует из того, что множество линейных операторов с простыми собственными значениями открыто в $L(\mathbb{R}^4)$, а собственные значения непрерывно зависят от оператора.

Докажем, что Σ^0 всюду плотно в $LE_{4,2}$. Пусть уравнение

$$X \in LE_{4,2} \setminus \Sigma^0 : dx = A_1 x dt_1 + A_2 x dt_2.$$

Обозначим $N_k(X)$ – число различных собственных значений оператора A_k ($k = 1, 2$), $N(X) = \max\{N_1(X), N_2(X)\}$.

Лемма. Если $N(X) < 4$, то существует сколь угодно близкое к X уравнение $X_* \in LE_{4,2} : dx = A_1^* x dt_1 + A_2^* x dt_2$, для которого $N(X_*) > N(X)$.

Доказательство. Пусть $N(X) < 4$. Тогда существует базис в \mathbb{R}^4 , в котором A_1 имеет одну из следующих действительных жордановых форм:

- 1) $A_1 = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 1 \\ 0 & \lambda_1^1 \end{pmatrix}, \lambda_3^1, \lambda_4^1 \right), \quad 2) A_1 = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 1 \\ 0 & \lambda_1^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_3^1 & 1 \\ 0 & \lambda_3^1 \end{pmatrix} \right),$
- 3) $A_1 = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 1 \\ 0 & \lambda_1^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2^1 & -\mu_2^1 \\ \mu_2^1 & \lambda_2^1 \end{pmatrix} \right), \quad \mu_2^1 \neq 0,$

$$4) A_1 = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1^1 & -\mu_1^1 \\ \mu_1^1 & \lambda_1^1 \end{pmatrix}, \lambda_3^1, \lambda_3^1 \right),$$

$$5) A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & -\mu_1^1 & 1 & 0 \\ \mu_1^1 & \lambda_1^1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1^1 & -\mu_1^1 \\ 0 & 0 & \mu_1^1 & \lambda_1^1 \end{pmatrix}, \quad \mu_1^1 \neq 0,$$

$$6) A_1 = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1^1 & -\mu_1^1 \\ \mu_1^1 & \lambda_1^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & -\mu_1^1 \\ \mu_1^1 & \lambda_1^1 \end{pmatrix} \right), \quad \mu_1^1 \neq 0,$$

$$7) A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^1 \end{pmatrix}, \quad 8) A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1^1 \end{pmatrix},$$

$$9) A_1 = \text{diag} (\lambda_1^1, \lambda_1^1, \lambda_3^1, \lambda_4^1).$$

В книге [4] для каждого из случаев 1 – 9 указан возможный вид матрицы A_2 коммутирующей с матрицей A_1 .

В случае 1 возможны следующие варианты: 1а) λ_1^1, λ_3^1 и λ_4^1 различны, 1б) $\lambda_1^1 \neq \lambda_3^1 = \lambda_4^1$, 1в) $\lambda_1^1 = \lambda_3^1 \neq \lambda_4^1$, 1г) $\lambda_1^1 = \lambda_3^1 = \lambda_4^1$.

В варианте 1а $A_2 = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & a \\ 0 & \lambda_1^2 \end{pmatrix}, \lambda_3^2, \lambda_4^2 \right)$, $N(X) = 3$. Матрицы

$$A_1^* = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 1 \\ 0 & \lambda_1^1 + \varepsilon \end{pmatrix}, \lambda_3^1, \lambda_4^1 \right) \quad \text{и} \quad A_2^* = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & a + \varepsilon \\ 0 & \lambda_1^2 + a\varepsilon + \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \lambda_3^2, \lambda_4^2 \right)$$

коммутируют, и соответствующее уравнение X_* можно сделать за счет выбора ε сколь угодно близким к X , при этом $N(X_*) = 4 > N(X)$.

В варианте 1б $A_2 = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & c_5 \\ 0 & \lambda_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \right)$. Возьмем

$$A_1^* = A_1, \quad A_2^* = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & c_5 \\ 0 & \lambda_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 + \varepsilon & c_2 \\ c_3 & c_4 - \varepsilon \end{pmatrix} \right).$$

Тогда $X_* \in \text{LE}_{4,2}$ и $N(X_*) = N_2(X_*) = 3 > N(X) = 2$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

В вариантах 1в и 1г, соответственно,

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & a & b & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & c & \lambda_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & c_9 & c_5 & c_6 \\ 0 & \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_7 & c_1 & c_2 \\ 0 & c_8 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Возьмем, соответственно,

$$A_1^* = A_1, \quad A_2^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & a & b & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & c & \lambda_3^2 + \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & c_9 & c_5 & c_6 \\ 0 & \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_7 & c_1 + \varepsilon & c_2 \\ 0 & c_8 & c_3 & c_4 - \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Тогда $X_* \in \text{LE}_{4,2}$, и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем в варианте 1в $N(X_*) = 3 > N(X) = 2$, а варианте 1г $N(X_*) = N_2(X_*) \geq 2 > N(X) = 1$.

Рассмотрим случай 2. Возможны следующие варианты: 2а) $\lambda_1^1 \neq \lambda_3^1$ и 2б) $\lambda_1^1 = \lambda_3^1$.

В варианте 2а $A_2 = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & a \\ 0 & \lambda_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_3^2 & b \\ 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}\right)$. Возьмем

$$A_1^* = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 1 \\ 0 & \lambda_1^1 + \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_3^1 & 1 \\ 0 & \lambda_3^1 \end{pmatrix}\right), \quad A_2^* = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & a + \varepsilon \\ 0 & \lambda_1^2 + a\varepsilon + \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_3^2 & b \\ 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}\right).$$

Тогда $X_* \in \text{LE}_{4,2}$, и при малом $\varepsilon > 0$ $N(X_*) = 3 > N(X) = 2$.

В варианте 2б

$$A_2 = \begin{pmatrix} u & a & c & d \\ 0 & u & 0 & c \\ e & f & v & b \\ 0 & e & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для A_2 имеет вид $((\lambda - u)(\lambda - v) - ce)^2 = 0$. Оно имеет либо (i) два двукратных корня, либо (ii) четырехкратный корень. Вариант (i) сводится сменой ролей A_1 и A_2 к одному из случаев 2а, 5, 6 или 9. В случае (ii) возьмем коммутирующие матрицы

$$A_1^* = A_1, \quad A_2^* = \begin{pmatrix} u & a & c + \varepsilon & d \\ 0 & u & 0 & c + \varepsilon \\ e + \varepsilon & f & v & b \\ 0 & e + \varepsilon & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы A_2^* имеет вид

$$((\lambda - u)(\lambda - v) - (c + \varepsilon)(e + \varepsilon))^2 = 0 \text{ или } (\lambda^2 - (u + v)\lambda + (uv - (c + \varepsilon)(e + \varepsilon)))^2 = 0.$$

При достаточно малых $|\varepsilon| \neq 0$ оно имеет два двукратных корня:

$$\frac{1}{2}(u + v \pm \sqrt{D + 4\varepsilon(c + e) + 4\varepsilon^2}), \text{ где } D = (u + v)^2 - 4(uv - ce).$$

Таким образом, $N(X_*) = N_2(X_*) = 2 > N(X) = 1$.

Случаи 3 и 4 рассматриваются аналогично, соответственно, случаям 2а и 1б.

В случае 5 матрица A_2 имеет вид

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & -\mu_1^2 & a & -b \\ \mu_1^2 & \lambda_1^2 & b & a \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 & -\mu_1^2 \\ 0 & 0 & \mu_1^2 & \lambda_1^2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Матрицы

$$A_1^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & -\mu_1^1 & 1 & 0 \\ \mu_1^1 & \lambda_1^1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1^1 + \varepsilon & -\mu_1^1 \\ 0 & 0 & \mu_1^1 & \lambda_1^1 + \varepsilon \end{pmatrix} \text{ и } A_2^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & -\mu_1^2 & a + \varepsilon & -b \\ \mu_1^2 & \lambda_1^2 & b & a + \varepsilon \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 + a\varepsilon + \varepsilon^2 & -\mu_1^2 - b\varepsilon \\ 0 & 0 & \mu_1^2 + b\varepsilon & \lambda_1^2 + a\varepsilon + \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

коммутируют; при малых $\varepsilon > 0$ они близки, соответственно, к A_1 и A_2 .
При этом, $N(X_*) = 4 > N(X) = 2$.

В случае 6

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & b_1 & -b_2 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ c_1 & -c_2 & d_1 & -d_2 \\ c_2 & c_1 & d_2 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A_2 – овеществление комплексной матрицы $A_2^C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где

$a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$ и $d = d_1 + id_2$. Для нее существует сколь

угодно близкая матрица $\begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^* + ia_2^* & b_1^* + ib_2^* \\ c_1^* + ic_2^* & d_1^* + id_2^* \end{pmatrix}$, имеющая различ-

ные не сопряженные комплексные собственные значения. Тогда

$$A_1^* = A_1 \quad \text{и} \quad A_2^* = \begin{pmatrix} a_1^* & -a_2^* & b_1^* & -b_2^* \\ a_2^* & a_1^* & b_2^* & b_1^* \\ c_1^* & -c_2^* & d_1^* & -d_2^* \\ c_2^* & c_1^* & d_2^* & d_1^* \end{pmatrix},$$

коммутируют и $N(X_*) = N_2(X_*) = 4 > N(X)$.

В случае 7 рассмотрим варианты 7а) $\lambda_4^1 \neq \lambda_1^1$ и 7б) $\lambda_4^1 = \lambda_1^1$. Матрица A_2 имеет, соответственно, вид

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & a & b & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & a & b & c \\ 0 & \lambda_1^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & d & \lambda_1^2 \end{pmatrix}.$$

В варианте 7а матрицы

$$A_1^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^1 + \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & a + \varepsilon & b & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 + a\varepsilon + \varepsilon^2 & a + \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^2 \end{pmatrix},$$

а в варианте 7б матрицы

$$A_1^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^1 + \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1^1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & a + \varepsilon & b & c \\ 0 & \lambda_1^2 + a\varepsilon + \varepsilon^2 & a + \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & d & \lambda_1^2 \end{pmatrix}$$

коммутируют и при малых $\varepsilon > 0$ близки, соответственно, к A_1 и A_2 . Ясно, что для варианта 7а $N(X_*) = 3 > N(X) = 2$, а для варианта 7б $N(X_*) = 2 > N(X) = 1$.

В случае 8

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & a & b & c \\ 0 & \lambda_1^2 & a & b \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 & a \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1^2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы

$$A_1^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^1 + \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1^1 \end{pmatrix} \text{ и } A_2^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & a + \varepsilon & b + \varepsilon & c \\ 0 & \lambda_1^2 + a\varepsilon + \varepsilon^2 & a + \varepsilon & b + \varepsilon \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 & a + (1-b)\varepsilon - \varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1^2 \end{pmatrix}$$

коммутируют; за счет выбора ε их можно сделать сколь угодно близкими к A_1 и A_2 ; для соответствующего уравнения $N(X_*) = 2 > N(X) = 1$.

В случае 9 рассмотрим варианты 9а) $\lambda_1^1, \lambda_3^1, \lambda_4^1$ различны, 9б) $\lambda_1^1 = \lambda_3^1 \neq \lambda_4^1$, 9в) $\lambda_1^1 = \lambda_3^1 = \lambda_4^1$. В варианте 9а) $A_2 = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \lambda_3^2, \lambda_4^3\right)$ и доказательство аналогично случаю 1б. В варианте 9б) $A_2 = \text{diag}(B, \lambda_4^3)$, где B – матрица третьего порядка. Возьмем $A_1^* = A_1$, $A_2^* = \text{diag}(B_*, \lambda_4^3)$, где $B_* = B + \varepsilon B_1$ – матрица третьего порядка с различными собственными значениями. Матрицы A_1^* и A_2^* коммутируют; за счет выбора ε их можно сделать сколь угодно близкими к A_1 и A_2 ; для соответствующего уравнения $N(X_*) = 4 > N(X) = 2$. В варианте 9в) возьмем $A_1^* = A_1$, а $A_2^* = A_2 + \varepsilon C$ – матрице с различными собственными значениями. Матрицы A_1^* и A_2^* коммутируют, а $N(X_*) = 4 > N(X) = 1$.

Таким образом, лемма доказана.

Из леммы следует, что для любого уравнения $X_0 \in \text{LE}_{3,2} \setminus \Sigma^0$ существует сколь угодно близкое уравнение $X : dx = A_1 x dt_1 + A_2 x dt_2$, для которого $N(X) = 4$. Для такого уравнения существует базис, в котором матрицы A_k имеют одну из следующих форм:

$$A_k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k, \lambda_4^k), \tag{1}$$

$$A_k = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1^k & -\mu_1^k \\ \mu_1^k & \lambda_1^k \end{pmatrix}, \lambda_2^k, \lambda_3^k\right), \tag{2}$$

$$A_k = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1^k & -\mu_1^k \\ \mu_1^k & \lambda_1^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2^k & -\mu_2^k \\ \mu_2^k & \lambda_2^k \end{pmatrix}\right), \tag{3}$$

где хотя бы одно из чисел μ_j^1 или μ_j^2 ($j=1,2$) отлично от нуля. Пусть $B_k = \text{diag}(4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k)$, $B_k = \text{diag}(3k-2, 3k-2, 3k-1, 3k)$ и

$B_k = \text{diag}(2k-1, 2k-1, 2k, 2k)$, соответственно. Тогда уравнение X_* : $dx = A_1^* x dt_1 + A_2^* x dt_2$, где $A_k^* = A_k + \varepsilon B_k$, $k=1,2$, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ принадлежит Σ^0 и сколь угодно близко к X_0 . Тем самым, доказано, что Σ^0 всюду плотно в $LE_{4,2}$.

3. Грубость уравнений из Σ^0 . Рассмотрим уравнение

$$X \in \Sigma^0 : dx = A_1 x dt_1 + A_2 x dt_2 .$$

Мы можем считать, что матрицы A_k ($k=1,2$) имеют одну из форм (1), (2) или (3). Так как $X \in \Sigma^0$, то векторы $\lambda_j = (\lambda_j^1, \lambda_j^2)$, где $j \in \{1,2,3,4\}$ в случае 1), $j \in \{1,2,3\}$ в случае 2) и $j \in \{1,2\}$ в случае 3), попарно линейно независимы. В каждом из рассматриваемых случаев существует такая линейная функция $l: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, что либо (а) все векторы λ_j расположены в полуплоскости $l(\lambda) > 0$, либо (б) один из векторов λ_j , принадлежит в полуплоскости $l(\lambda) < 0$, а остальные векторы принадлежат полуплоскости $l(\lambda) > 0$.

В случае (а) утверждение теоремы следует из [2].

В случае (б), при необходимости сделав линейную замену времени и перенумеровав координаты, мы можем считать, что $l(\lambda^1, \lambda^2) = \lambda^1$ и либо (b₁) матрицы A_k имеют вид 1), а $\lambda_j^1 > 0$ для $j \in \{1,2,3\}$, $\lambda_4^2 < 0, \delta_{12} > 0, \delta_{23} > 0, \delta_{13} > 0$, либо (b₂) матрицы A_k имеют вид 2), а $\lambda_j^1 > 0$ для $j \in \{1,2\}$, $\lambda_3^2 < 0$.

Рассмотрим вариант (b₁). В этом случае величины δ_{14}, δ_{24} и δ_{34} не могут иметь один знак. Если $\delta_{14} > 0$, то $\delta_{24} > 0$ и $\delta_{34} > 0$. Поэтому имеем либо (b₁₁) $\delta_{14} < 0, \delta_{24} > 0$, а тогда и $\delta_{34} > 0$, либо (b₁₂) $\delta_{14} < 0, \delta_{24} < 0$, а $\delta_{34} > 0$,

Обозначим

$S = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, $S_i^+ = \{x \in S : x_i > 0\}$, $S_i^- = \{x \in S : x_i < 0\}$, $\Pi_i^\pm = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_i = \pm 1\}$, $i \in \{1,2,3,4\}$, $p_i^\pm : \Pi_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^3$, $p_i^\pm(x) := (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где (ξ_1, ξ_2, ξ_3) – последовательность чисел (x_1, x_2, x_3, x_4) , в которой пропущено число x_i .

Траектории уравнения $dx = A_1 x dt_1$ трансверсальны S и гиперплоскостям Π_i^\pm . Поэтому определены отображения $\pi_i^\pm : S_i^\pm \rightarrow \Pi_i^\pm$ по траекто-

риям этого уравнения. Пары (S_i^\pm, Ξ_i^\pm) , где $\Xi_i^\pm := p_i^\pm \circ \pi_i^\pm$, можно рассматривать как локальные карты на S . Пересечения траекторий уравнения X с S являются траекториями векторного поля X_S на S , задаваемого равенством $X_S(x) = (v(x)A_1 + A_2)x$, где

$$v(x) = -(\lambda_1^1 x_1^2 + \lambda_2^1 x_2^2 + \lambda_3^1 x_3^2)^{-1} (\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + \lambda_3^2 x_3^2).$$

В картах (S_i^\pm, Ξ_i^\pm) оно имеет вид:

$$X_S(x) = ((\delta_{12} / \lambda_1^1) \xi_1, (\delta_{13} / \lambda_1^1) \xi_2, (\delta_{14} / \lambda_1^1) \xi_3), \quad x \in S_1^\pm,$$

$$X_S(x) = ((\delta_{21} / \lambda_2^1) \xi_1, (\delta_{23} / \lambda_2^1) \xi_2, (\delta_{24} / \lambda_2^1) \xi_3), \quad x \in S_2^\pm,$$

$$X_S(x) = ((\delta_{31} / \lambda_3^1) \xi_1, (\delta_{32} / \lambda_3^1) \xi_2, (\delta_{34} / \lambda_3^1) \xi_3), \quad x \in S_3^\pm.$$

Пусть $\tilde{X} \in \Sigma^0$: $dx = \tilde{A}_1 x dt_1 + \tilde{A}_2 x dt_2$ – достаточно близкое к X уравнение. Заменяя \tilde{X} на линейно сопряженное уравнение и вернувшись к прежним обозначениям, мы без ограничения общности можем считать, что в координатах (x_1, x_2, x_3, x_4) матрицы \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 имеют диагональный вид. Числа $\tilde{\lambda}_j^k$, $\tilde{\delta}_{ij}$, векторное поле \tilde{X}_S и локальные карты $(S_i^\pm, \tilde{\Xi}_i^\pm)$ определим аналогично числам λ_j^k , δ_{ij} , векторному полю X_S и локальным картам (S_i^\pm, Ξ_i^\pm) . Тогда $\text{sgn } \tilde{\lambda}_j^k = \text{sgn } \lambda_j^k$, $\text{sgn } \tilde{\delta}_{ij} = \text{sgn } \delta_{ij}$, $i, j \in \{1, \dots, 4\}$, $i \neq j$.

Поверхности $S_i = \{x \in S : x_i = 0\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, являются инвариантными для X_S и \tilde{X}_S . Кроме того, траектории X_S отображаются на $X_S|_{S_4}$ траектории $X_S|_{S_4}$ при проекции $S \rightarrow S_4$. Точки $O_i^\pm \in S$, $i \in \{1, 2, 3\}$, с координатами $x_i = \pm 1$, $x_j = 0$ при $j \neq i$, являются седлами векторных полей X_S и \tilde{X}_S .

Рассмотрим случай (b₁₁). Тогда у O_1^\pm (O_3^\pm), устойчивое (неустойчивое) инвариантное многообразие одномерно и принадлежит $S_2 \cap S_3$ ($S_2 \cap S_1$), а неустойчивое (устойчивое) инвариантное многообразие двумерно и принадлежит S_4 ; у O_2^\pm устойчивое (неустойчивое) инвариантное многообразие одномерно (двумерно) и принадлежит $S_4 \cap S_3$ (S_1). Пусть $S^+ := \{x \in S : x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4\}$, $S_4^+ := \{x \in S^+ : x_4 = 0\} = \{x \in S_4 : x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$ (рис. 1). Обозначим G_i (\tilde{G}_i), $i = 1, 3$, и, соответственно, Π_i ($\tilde{\Pi}_i$) – множество точек из S^+ , имеющих в карте (S_i^+, Ξ_i^+) ($(S_i^+, \tilde{\Xi}_i^+)$) координа-

ты (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , удовлетворяющие условию $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq \varepsilon^2$, соответственно, $\xi_1^2 + \xi_2^2 = \varepsilon^2$, где выбор числа $\varepsilon > 0$ будет уточнен в дальнейшем. Пусть $\kappa_i := (\tilde{\delta}_{i2} / \tilde{\lambda}_2^1) / (\delta_{i2} / \lambda_2^1)$, $i = 1, 3, 4$. Обозначим G_2 (\tilde{G}_2) – множество точек из S^+ , имеющих в карте (S_2^+, Ξ_2^+) ($(S_2^+, \tilde{\Xi}_2^+)$) координаты (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , удовлетворяющие условиям $0 \leq \xi_i \leq \varepsilon$ ($0 \leq \xi_i \leq \tilde{\varepsilon}_i$), $i = 1, 2$, где $\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon^{\kappa_1}$, $\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon^{\kappa_3}$. Мы можем считать ε столь малым, что множества G_i (\tilde{G}_i), $i = 1, 2, 3$, между собой не пересекаются.

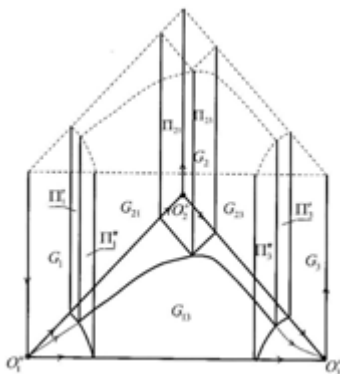


Рис. 1. Разбиение множества S^+ .

Пусть Π_{21} и Π_{23} ($\tilde{\Pi}_{21}$ и $\tilde{\Pi}_{23}$) – часть границы G_2 (\tilde{G}_2), выделяемая в указанной карте, соответственно, условиями $\xi_1 = \varepsilon$ и $\xi_2 = \varepsilon$ ($\xi_1 = \tilde{\varepsilon}_1$ и $\xi_2 = \tilde{\varepsilon}_2$). Отображение $h_2 : G_2 \rightarrow \tilde{G}_2$, переводящее точку с координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 в точку с координатами $(\xi_1)^{\kappa_1}, (\xi_2)^{\kappa_3}, (\xi_3)^{\kappa_4}$, является гомеоморфизмом, отображающим траектории $X_S|_{G_2}$ на траектории $X_{\tilde{S}}|_{\tilde{G}_2}$, Π_{2i} на $\tilde{\Pi}_{2i}$, $i = 1, 3$.

Пусть $\varphi^f : S \rightarrow S$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\tilde{\varphi}^f : S \rightarrow S$, $\tau \in \mathbb{R}$ – динамические системы, задаваемые векторными полями X_S и \tilde{X}_S . Отрицательная при $i = 1$, положительная при $i = 3$ полутраектория поля X_S , начинающаяся в точке $x \in \Pi_{2i}$, пересекает поверхность Π_i в единственной точке в момент времени $\tau_{2i}(x) \neq 0$, где $\tau_{2i}(\cdot)$ – гладкие функции, причем $\tau_{2i}(x)$ не зависит как от координаты x_4 точки x , так и от координаты ξ_3 точки x в карте

(S_2^+, Ξ_2^+) . Обозначим G_{2i} объединение дуг этих полутраекторий между точками x и $\varphi^{\tau_{2i}(x)}(x)$. Аналогично определим для поля \tilde{X}_S функции $\tilde{\tau}_{2i}(\cdot)$, а также множества \tilde{G}_{2i} , $i=1,3$. Отображение $h_{2i}: G_{2i} \rightarrow \tilde{G}_{2i}$, $i=1,3$, ставящее в соответствие точке $\varphi^{\rho \tau_{2i}(x)}(x) \in G_{2i}$, где $x \in \Pi_{2i}$, $0 \leq \rho \leq 1$, точку $\tilde{\varphi}^{\rho \tilde{\tau}_{2i}(x)}(h_{2i}(x)) \in \tilde{G}_{2i}$ является гомеоморфизмом, отображающим траектории $X_S|_{G_{2i}}$ на траектории $\tilde{X}_S|_{\tilde{G}_{2i}}$.

Обозначим Π'_i и $\tilde{\Pi}'_i$, соответственно, множество точек $\varphi^{\tau_{2i}(z)}(z)$, $z \in \Pi_{2i}$ и $\tilde{\varphi}^{\tilde{\tau}_{2i}(z)}(z)$, $z \in \tilde{\Pi}_{2i}$ ($i=1,3$). Множества Π'_i и $\tilde{\Pi}'_i$ (Π'_3 и $\tilde{\Pi}'_3$) лежат, соответственно, на поверхности Π_1 и $\tilde{\Pi}_1$ (Π_3 и $\tilde{\Pi}_3$) и выделяется там, соответственно, неравенствами $0 \leq \xi_2 \leq v_2$ и $0 \leq \tilde{\xi}_2 \leq \tilde{v}_2$ ($0 \leq \xi_1 \leq v_1$ и $0 \leq \tilde{\xi}_1 \leq \tilde{v}_1$), где числа $v_1, v_2, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in (0; \varepsilon)$. Обозначим Π''_i и $\tilde{\Pi}''_i$ замыкания, соответственно, множеств $\Pi_i \setminus \Pi'_i$ и $\tilde{\Pi}_i \setminus \tilde{\Pi}'_i$ ($i=1,3$). Продолжим гомеоморфизм $h_{21}|_{\Pi_1}: \Pi'_1 \rightarrow \tilde{\Pi}'_1$ ($i=1,3$) до гомеоморфизма $h_1^*: \Pi_1 \rightarrow \tilde{\Pi}_1$.

Положительные полутраектории поля X_S (\tilde{X}_S), начинающиеся в точках $z \in \Pi''_i$ ($z \in \tilde{\Pi}''_i$), пересекают поверхность Π_3 ($\tilde{\Pi}_3$) в момент времени $\tau_{13}(z) > 0$ ($\tilde{\tau}_{13}(z) > 0$), где $\tau_{13}(\cdot)$ ($\tilde{\tau}_{13}(\cdot)$) – гладкая функция. Обозначим G_{13} (\tilde{G}_{13}) множество, состоящее из дуг этих полутраекторий между точками z и $\varphi^{\tau_{13}(z)}(z)$ (z и $\tilde{\varphi}^{\tilde{\tau}_{13}(z)}(z)$). Во всех точках $z \in \Pi_2$ ($z \in \tilde{\Pi}_2$) с координатами $\xi_1 = \varepsilon$, $\xi_2 = \varepsilon$ ($\xi_1 = \tilde{\varepsilon}_1$, $\xi_2 = \tilde{\varepsilon}_2$) в карте (S_2^+, Ξ_2^+) ($(\tilde{S}_2^+, \tilde{\Xi}_2^+)$) числа $|\tau_{21}(z)|$ и $\tau_{23}(z)$ ($|\tilde{\tau}_{21}(z)|$ и $\tilde{\tau}_{23}(z)$) постоянны; обозначим их соответственно a_1 и a_3 (\tilde{a}_1 и \tilde{a}_3). В точках $z \in \Pi'_1 \cap \Pi''_1$ ($z \in \tilde{\Pi}'_1 \cap \tilde{\Pi}''_1$) $\tau_{13}(z) = a_1 + a_2$ ($\tilde{\tau}_{13}(z) = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2$). Зададим отображение h_{13} множества G_{13} на множество \tilde{G}_{13} , положив

$$\text{для } x = \varphi^{s \tau_{13}(z) a_1 / (a_1 + a_2)}(z), \quad z \in \Pi''_1, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad h_{13}(x) := \varphi^{s \tilde{\tau}_{13}(z) \tilde{a}_1 / (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)}(h_1^*(z)),$$

$$\text{для } x = \varphi^{\tilde{\tau}_{13}(z)(a_1 + s a_2) / (a_1 + a_2)}(z), \quad z \in \Pi'_1, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad h_{13}(x) := \varphi^{\tilde{\tau}_{13}(z)(\tilde{a}_1 + s \tilde{a}_2) / (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)}(h_1^*(z)).$$

В точках $x \in G_{13} \cap G_{21}$ $h_{13}(x) = h_{21}(x)$, в точках $x \in G_{13} \cap G_{23}$ $h_{13}(x) = h_{23}(x)$.

Определим гомеоморфизм $h_3^*: \Pi_3 \rightarrow \tilde{\Pi}_3$, положив $h_3^*(x) = h_{23}(x)$ для $x \in \Pi'_3$ и $h_3^*(x) = h_{13}(x)$ для $x \in \Pi''_3$.

Продолжим гомеоморфизм $h_1^* : \Pi_1 \rightarrow \tilde{\Pi}_1$ до гомеоморфизма $h_1 : G_1 \rightarrow G_1$. Обозначим G_{1n} и Π_{1n} (B_n), $n \in \mathbb{N}$, – подмножества G_1 и Π_1 (G_1) соответственно, задаваемые условиями $n-1 \leq \xi_3 \leq n$ ($\xi_3 = n+1$) в координатах в карте (S_1^+, Ξ_1^+) ; $\tilde{\Pi}_{1n} := h_1(\Pi_{1n})$. Пусть Π_{11}^n и $\Pi_{11}^{\geq n}$, $n \in \mathbb{N}$, множества точек $x \in \Pi_{11}$, задаваемых, соответственно, условиями $(0,5)^n \leq \xi_3 \leq (0,5)^{n-1}$ и $0 \leq \xi_3 \leq (0,5)^{n-1}$, а $\tilde{\Pi}_{11}^n$ и $\tilde{\Pi}_{11}^{\geq n}$ – их образы при гомеоморфизме h_1^* .

Выберем возрастающую последовательность чисел l_n , так, чтобы в координатах в карте (S_1^+, Ξ_1^+) $\max_{x \in \tilde{\Pi}_{1n}} \xi_3(x) < l_n$. Обозначим

$\tilde{B}_n := \{x \in \tilde{G}_1 : \xi_3(x) = l_n\}$. Отрицательная полутраектория поля X_S (\tilde{X}_S), начинающаяся в точке $x \in \Pi_{11}$ ($x \in \tilde{\Pi}_{11}$) трансверсально пересекает B_1 (\tilde{B}_1) в единственной точке в момент времени $-T(x) < 0$ ($-\tilde{T}(x) < 0$), при этом $T(\cdot)$ ($\tilde{T}(\cdot)$) – гладкая функция, $T(x) \rightarrow +\infty$ ($\tilde{T}(x) \rightarrow +\infty$) при $x \rightarrow x^0 \in \Pi_1 \cap S_4$ равномерно относительно z_0 . Определим множества $B_1^n := \{\varphi^{-T(x)}(x) : x \in \Pi_{11}^n\}$, $\tilde{B}_1^n := \{\varphi^{-\tilde{T}(x)}(x) : x \in \tilde{\Pi}_{11}^n\}$, $B_1^{\geq n} := \bigcup_{k \geq n} B_1^k \cup \{q\}$, $\tilde{B}_1^{\geq n} := \bigcup_{k \geq n} \tilde{B}_1^k \cup \{\tilde{q}\}$, где q (\tilde{q}) – точка пересечения B_1 (\tilde{B}_1) с устойчивым инвариантным многообразием седла O_1^+ , то есть $\{q\} = B_1 \cap S_2 \cap S_3$ ($\{\tilde{q}\} = \tilde{B}_1 \cap S_2 \cap S_3$). Множества $\Pi_{11}^{\geq n}$ ($\tilde{\Pi}_{11}^{\geq n}$) – замкнутые окрестности $\Pi_1 \cap S_4$ в Π_{11} ($\tilde{\Pi}_{11}$), а множества $B_1^{\geq n}$ ($\tilde{B}_1^{\geq n}$) – замкнутые окрестности точки q (\tilde{q}) в B_1 (\tilde{B}_1). Обозначим $B_1^* := B_1^{\geq 1}$, $\tilde{B}_1^* := \tilde{B}_1^{\geq 1}$. Для любой окрестности U , соответственно $\Pi_1 \cap S_4$ в Π_{11} , q в B_1 и \tilde{q} в \tilde{B}_1 найдется такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что, при $n \geq n_0$, соответственно, $\tilde{\Pi}_{11}^{\geq n} \subset U$, $B_1^{\geq n} \subset U$ и $\tilde{B}_1^{\geq n} \subset U$. Поэтому отображение $\theta_1 : B_1^* \rightarrow \tilde{B}_1^*$, задаваемое равенством $\theta_1(x) := \tilde{\varphi}^{-\tilde{T}(h_1^*(x))}(h_1^*(z))$, если $x = \varphi^{-T(z)}(z)$, $z \in \Pi_{11}$, и $\theta_1(q) := \tilde{q}$, является гомеоморфизмом.

Обозначим τ_n наименьшее из чисел $\min_{x \in \Pi_{11}^n} T(x)$ и $\min_{x \in \tilde{\Pi}_{11}^n} \tilde{T}(x)$. Тогда $\tau_n \rightarrow +\infty$.

Если точка $x \in G_{11}$ не лежит на неустойчивом (устойчивом) инвариантном многообразии седла O_1^+ , то есть $x \notin S_4$ ($x \notin S_2 \cap S_3$), то существ-

вует единственное число $T_-(x) > 0$ ($T_+(x) \geq 0$) такое, что $\varphi^{-T_-(x)}(x) \in B_1$ ($\varphi^{T_+(z)}(z) \in \Pi_{11}$), при этом $T_-(\cdot)$ ($T_+(\cdot)$) – гладкая функция. В точках $x \in G_{11} \setminus (S_4 \cup (S_2 \cap S_3))$ $T_-(x) = T(\varphi^{T_+(x)}(x)) - T_+(x)$.

Обозначим G_{11}^1 (\tilde{G}_{11}^1) множество, состоящее из точек $\varphi^{-T(x)s}(x)$, $x \in \Pi_{11}$, $s \in [0, 1]$ ($\tilde{\varphi}^{-\tilde{T}(x)s}(x)$, $x \in \tilde{\Pi}_{11}$, $s \in [0, 1]$), $\varphi^\rho(q)$, $\rho \in [0, +\infty)$ ($\tilde{\varphi}^\rho(\tilde{q})$, $\rho \in [0, +\infty)$) и точек, принадлежащих $S_4 \cap G_1$ ($S_4 \cap \tilde{G}_1$). Определим отображение $h_1^1: G_{11}^1 \rightarrow \tilde{G}_{11}^1$. Пусть $x \in G_{11}^1$. Положим

$$h_1^1(x) := \tilde{\varphi}^{-T_+(x)}(h_1^*(\varphi^{T_+(x)}(x))), \text{ если } x \in S_4 \setminus O_1^+,$$

$$h_1^1(x) := \tilde{\varphi}^{T_-(x)}(\theta_1(\varphi^{-T_-(x)}(x))), \text{ если } x \in S_2 \cap S_3 \setminus O_1^+, h_1^1(O_1^+) := O_1^+.$$

Если $x \in G_2 \setminus (S_1 \cup (S_0 \cap S_3))$, то $\varphi^{T_+(z)}(x) \in \Pi_{11}^n$, при некотором $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$h_1^1(x) := \tilde{\varphi}^{-T_+(z)}(h_1^*(\varphi^{T_+(z)}(x))), \text{ если } T_+(x) \leq \tau_n/3,$$

$$h_1^1(x) := \tilde{\varphi}^{T_-(x)}(\theta_1(\varphi^{-T_-(x)}(x))), \text{ если } T(\varphi^{T_+(x)}(x)) - \tau_n/3 \leq T_+(x) \leq T(\varphi^{T_+(x)}(x))$$

(или в других обозначениях $T_-(x) \leq \tau_n/3$),

$$h_1^1(x) := \tilde{\varphi}^{-T_+(x)}(h_1^*(\varphi^{T_+(x)}(x))),$$

где

$$T_+(x) := \tau_n/3 + [\tilde{T}(h_1^*(\varphi^{T_+(x)}(x))) - 2\tau_n/3][T((\varphi^{T_+(x)}(x)) - 2\tau_n/3)^{-1}[T_+(x) - \tau_n/3],$$

если $\tau_n/3 \leq T_+(x) \leq T(\varphi^{T_+(x)}(x)) - \tau_n/3$.

Ясно, что $h_1^1: G_{11}^1 \rightarrow \tilde{G}_{11}^1$ – гомеоморфизм, отображающий траектории $X_s \Big|_{G_{11}^1}$ на траектории $\tilde{X}_s \Big|_{\tilde{G}_{11}^1}$. Покажем, что его можно продолжить до гомеоморфизма $h_1: G_1 \rightarrow \tilde{G}_2$, сохраняющего разбиение на траектории.

Определим по индукции множества G_{1k}^1 , G_{1k}^2 и B_k^* , $k = 2, 3, \dots$ (рис. 2). Отрицательные полутраектории X_s , начинающиеся, в точках $x \in B_1^*$ и $x \in \Pi_{12}$ ($x \in \tilde{B}_1^*$ и $x \in \tilde{\Pi}_{12}$), соответственно, пересекают B_2 (\tilde{B}_2), соответственно в моменты времени $T_{11}(x)$ и $T_{12}(x)$ ($\tilde{T}_{11}(x)$ и $\tilde{T}_{12}(x)$), где $T_{11}(\cdot)$ и $T_{12}(\cdot)$ ($\tilde{T}_{11}(\cdot)$ и $\tilde{T}_{12}(\cdot)$) – гладкие функции. Пусть

$$G_{12}^1 := \{x = \varphi^{sT_{11}(z)}(z) : z \in B_1^*, s \in [0, 1]\}, G_{12}^2 := \{x = \varphi^{sT_{12}(z)}(z) : z \in \Pi_{12}, s \in [0, 1]\},$$

$$B_2^* := \{x = \varphi^{T_{11}(z)}(z) : z \in B_1^*\} \cup \{x = \varphi^{T_{12}(z)}(z) : z \in \Pi_{12}\}.$$

Если G_{1k-1}^1 , G_{1k-1}^2 и B_{k-1}^* уже определены, то положим

$$G_{1k}^1 := \{x = \varphi^{sT_{1k-1}(z)}(z) : z \in B_{k-1}^*, s \in [0, 1]\},$$

$$G_{1k}^2 := \{x = \varphi^{sT_{1k-1}(z)}(z) : z \in \Pi_{1k}, s \in [0, 1]\},$$

$$B_k^* := \{x = \varphi^{T_{k-1}(z)}(z) : z \in B_{k-1}^*\} \cup \{x = \varphi^{T_{k-2}(z)}(z) : z \in \Pi_{1k}\},$$

где $T_{k-1}(z)$ ($T_{k-2}(z)$) – время перехода от точки $z \in B_{k-1}^*$ ($z \in \Pi_{1k}$) до B_k .

Аналогично определим функции $\tilde{T}_j(z)$ и множества \tilde{G}_{1k}^1 , \tilde{G}_{1k}^2 , \tilde{B}_k , $k = 2, 3, \dots, j = 1, 2$.

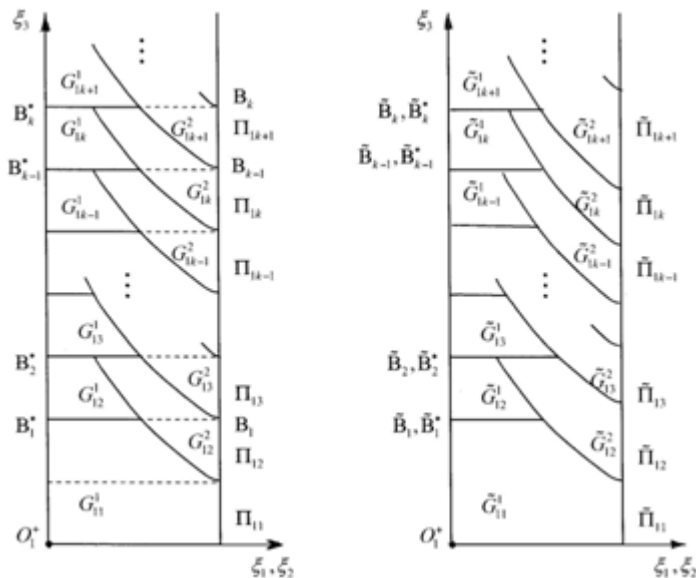


Рис. 2. Разбиения множества G_1

Определим отображение $\eta_k : \Pi_{1k} \rightarrow \Pi_{1k} \cap \Pi_{1k-1}$, поставив в соответствие точке $x \in \Pi_{1k}$ с координатами $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, $\xi_3(x)$ точку с координатами $\xi_1'(x)$, $\xi_2'(x)$, $\xi_3'(x)$, где $\xi_3'(x)$ – целая часть $\xi_3(x)$, если $k-1 \leq \xi_3(x) < k$ и $\xi_3'(x) = k-1$, если $\xi_3(x) = k$.

Для $z \in \Pi_{1k} \cap \Pi_{1k-1}$, $k = 2, 3, \dots$ $T_{k-2}(z) = T_{k-2}(z) + T_{k-1}(\varphi^{T_{k-2}(z)}(z))$ (здесь $T_{02}(z) := -T(z)$). Зададим функцию $\alpha_k : \Pi_{1k} \cap \Pi_{1k-1} \rightarrow (0, 1)$ равен-

ством $\alpha_k(z) := T_{k-2,2}(z)/T_{k-1,2}(z)$. Определим по индукции гомеоморфизмы

$$\theta_k : \mathbf{B}_k^* \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_k^*, h_1^{kj} : G_{1k}^j \rightarrow \tilde{G}_{1k}^j, \quad j = 1, 2; \quad k = 2, 3, \dots, \text{ положив}$$

$$\text{для } x = \varphi^{T_{k-1,1}(z)}(z), z \in \mathbf{B}_{k-1}^* \quad \theta_k(x) := \tilde{\varphi}^{\tilde{T}_{k-1}(\theta_{k-1}(z))}(\theta_{k-1}(z)),$$

$$\text{для } x = \varphi^{T_{k-1,2}(z)}(z), z \in \Pi_{1k} \quad \theta_k(x) := \tilde{\varphi}^{\tilde{T}_{k-1}(h_1^*(z))}(h_1^*(z)),$$

$$\text{для } x = \varphi^{sT_{k-1,1}(z)}(z), z \in \mathbf{B}_{k-1}^*, s \in [0, 1]$$

$$h_1^{k1}(x) := \tilde{\varphi}^{s\tilde{T}_{k-1}(\theta_{k-1}(z))}(\theta_{k-1}(z)),$$

$$\text{для } x = \varphi^{s\alpha_k(\eta_k(z))T_{k-1,2}(z)}(z), z \in \Pi_{1k}, s \in [0, 1]$$

$$h_1^{k2}(x) := \tilde{\varphi}^{s\alpha_k(\eta_k(z))\tilde{T}_{k-1}(h_1^*(z))}(h_1^*(z)),$$

$$\text{для } x = \varphi^{(s+(1-s)\alpha_k(\eta_k(z)))T_{k-1,2}(z)}(z), z \in \Pi_{1k}, s \in [0, 1]$$

$$h_1^{k2}(x) := \tilde{\varphi}^{(s+(1-s)\alpha_k(\eta_k(z)))\tilde{T}_{k-1}(h_1^*(z))}(h_1^*(z))$$

Теперь мы можем определить гомеоморфизм $h_1 : G_1 \rightarrow G_1$ равенствами

$$h_1(x) = h_1^{k1}(x) \text{ для } x \in G_{1k}^1, k = 1, 2, 3, \dots, \quad h_1(x) = h_1^{k2}(x) \text{ для } x \in G_{1k}^2, k = 2, 3, \dots$$

Он переводит траектории $X_S \big|_{G_1}$ в траектории $\tilde{X}_S \big|_{\tilde{G}_1}$.

Аналогично получаем гомеоморфизм $h_2 : G_3 \rightarrow G_3$ переводящий

траектории $X_S \big|_{G_3}$ в траектории $\tilde{X}_S \big|_{\tilde{G}_3}$.

Определим отображение $h_+ : S^+ \rightarrow S^+$ равенствами $h_+(x) := h_i(x)$

для $x \in G_k$, $k = 1, 2, 3$; $h_+(x) := h_{21}(x)$ для $x \in G_{21}$; $h_+(x) := h_{23}(x)$ для

$x \in G_{23}$; $h_+(x) := h_{13}(x)$ для $x \in G_{13}$.

Поскольку векторные поля X_S и \tilde{X}_S инвариантны относительно симметрий $x_i \mapsto -x_i$, то гомеоморфизм h_+ можно продолжить до гомеоморфизма

$h_S : S \rightarrow S$, отображающий траектории X_S на траектории \tilde{X}_S .

Аналогично тому, как гомеоморфизм h_1^* был продолжен до гомеоморфизма h_1 , можно продолжить h_S до гомеоморфизма $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, переводящего

траектории уравнения $\dot{x} = A_1 x$ в траектории уравнения $\dot{x} = \tilde{A}_1 x$, а по-

тому и траектории уравнения X в траектории уравнения \tilde{X} .

Таким образом, в случае (b₁₁) уравнение X является грубым. Аналогично рассматривается случай (b₁₂).

Осталось рассмотреть случай (b₂). Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_1^1 > 0$, $\lambda_2^1 > 0$, $\lambda_3^1 < 0$, $\delta_{12}^1 > 0$, $\delta_{23}^1 > 0$, $\delta_{13}^1 < 0$. Векторное поле X_S в карте (S_3^\pm, Ξ_3^\pm) имеет вид

$$X_S(x) = ((\delta_{21}^1 / \lambda_2^1) \xi_1 - (\delta_{21}^1 / \lambda_2^1) \xi_2, (\delta_{21}^1 / \lambda_2^1) \xi_1 + (\delta_{21}^1 / \lambda_2^1) \xi_2, (\delta_{23}^1 / \lambda_2^1) \xi_3),$$

где $\delta_{12}^1 = \mu_1^2 \lambda_2^1 - \mu_1^1 \lambda_2^2$, Единственное неблуждающее множество у X_S в S_3^\pm седло O_3^\pm . Обозначим $C := \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Пусть $p : C \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, где $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$, задается равенствами $p(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_3, x_4, \theta)$, если $x_1 = \cos \theta$, $x_2 = \sin \theta$ $\theta \in \mathbb{S}^1$; $\pi_S : S \setminus (O_3^+ \cup O_3^-) \rightarrow C$ – отображение по траекториям уравнения $\dot{x} = A_1 x$. В координатах (x_3, x_4, θ) , задаваемых в $S \setminus (O_3^+ \cup O_3^-)$ отображением $p \circ \pi_S$, $X_S(x) = ((\delta_{12}^1 / \lambda_1^1) x_3, (\delta_{13}^1 / \lambda_1^1) x_4, \delta_{11}^1 / \lambda_1^1)$, где $\delta_{11}^1 = \mu_1^1 \lambda_1^2 - \mu_1^2 \lambda_1^1 \neq 0$. Единственное неблуждающее множество поля X_S в $S \setminus (O_3^+ \cup O_3^-)$ – седловая замкнутая траектория, задаваемая уравнениями $x_3 = x_4 = 0$.

Аналогично случаю (b₁₁) доказывается, что для достаточно близкого к X уравнения \tilde{X} существует гомеоморфизм $h_S : S \rightarrow S$, отображающий траектории X_S на траектории \tilde{X}_S , и его можно продолжить до гомеоморфизма $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, переводящего траектории уравнения X в траектории уравнения \tilde{X} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайшун И.В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2004. 272 с.
2. *Ладис Н.Н.* Топологическая эквивалентность линейных действий \mathbb{R}^2 на \mathbb{R}^n // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 3. С. 443–448.
3. *Ройтенберг В.Ш.* О вполне интегрируемых трехмерных линейных дифференциальных уравнениях с двумерным временем и их продолжениях на проективное пространство // Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире. 2015. Т. 3, № 11. С. 7-18.
4. *Гантмахер. Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 378

Н. В. Бахмутова, С. А. Бельман

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина,
Россия, г. Рязань, e-mail: notiy__1@mail.ru, s.belman@rsu.edu.ru

ЭМОЦИОНАЛЬНЫЙ ФОН КАК ФАКТОР ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Рассматривается роль эмоций в преподавании математики. Исследованы особенности эмоционального фона обучающихся. Приведены рекомендации планирования занятий математики с целью повышения качества образовательного процесса.

Ключевые слова: качество образования, эмоциональный фон, преподавание математики.

N. V. Bakhmutova, S. A. Belman

*S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: notiy_1@mail.ru, s.belman@rsu.edu.ru*

EMOTIONAL BACKGROUND AS A FACTOR OF IMPROVING THE QUALITY OF TEACHING MATHEMATICS

There is the role of emotions in the teaching of mathematics. There was studied the features of the emotional background of the students. The recommendations are given for planning the mathematics classes in order to improve the quality of the educational process.

Keywords: quality of education, emotional background, teaching of mathematics.

Преподавание – это искусство, которое затрагивает все виды деятельности человека: физическую активность, мыслительную, игровую, духовную и творческие деятельности. Преподавание математики в особенности. «Ни один учебный предмет в такой мере, как математика, не пробуждает в человеке способность к пониманию обращенной к нему осмысленной речи»¹. В своей работе мы постарались ответить на вопрос: как заин-

¹Из лекции профессора РГУ А.Х. Назиева.

тересовать обучающихся на курсах математики, постараться завладеть их мыслями и направить их на открытие.

История математики богата своими героями. Однако не всегда их заслуги были вовремя оценены и приняты обществом. Примерами являются деятельность норвежского математика Н. Абеля (1802-1829 гг.), Э. Гаула (1811-1832 гг.), П. Ванцель (1814-1848 гг.) и других. Но это не останавливало ученых заниматься математикой. Можно представить их чувства при открытии истины. Например, радость Николая Орема (мыслитель 14 века), когда он доказал расходимость гармонического ряда. Радость открытия - вот что приносит математика! Поэтому формирование благоприятной эмоциональной обстановки для научного познания является одной из важнейших задач в преподавании математики.

Доцент, кандидат педагогических наук В.В. Мороз в своей работе «Эмоции как аксиологический фактор развития креативности студентов университета» справедливо отмечает, что «Эмоциональный аспект имеет большое значение не только для успешного протекания креативного процесса, но и для изменения характера взаимодействия между преподавателем и студентами» [3]. Педагог-психолог К.Г. Караханян в своем исследовании [1] говорит о том, что положительный эмоциональный фон создается путем создания условий психологической поддержки в учебной деятельности, это влияет на самоопределение и самоутверждение личности в различных сферах жизнедеятельности. Обращая внимание на слова «самоопределение» и «самоутверждение личности», становится ясно, что именно на личность должен ориентироваться каждый преподаватель согласно принятому 29 декабря 2012 года закону об образовании «Содержание образования должно содействовать взаимопониманию и сотрудничеству между людьми, ... обеспечивать развитие способностей каждого человека, формирование и развитие его личности в соответствии с принятыми в семье и обществе духовно-нравственными и социокультурными ценностями».

Таким образом, создание положительного эмоционального фона является одним из факторов повышения качества современного образования, в том числе математического. Управление таким фактором должно быть основано на особенностях протекания эмоционального потока обучающихся. Нами был проведен эксперимент, в котором был отслежен уровень эмоционального фона в процессе коммуникации, модулируемой на занятиях.

Студентам 1-го курса факультета иностранных языков, 2-го курса физико-математического факультета Рязанского государственного университета им. С.А. Есенина было предложено просмотреть видеоролик урока в подготовительной группе детского сада. Временной отрезок видео – 16 минут – был разбит на 8 промежутков: $(0, 2]$, $(2, 4]$, ..., $(14, 16]$. Зрители оценивали эмоциональный фон детей по шкале Хаббарда каждые две ми-

ноты. Таким образом, каждому временному промежутку $(t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{1,8}$ было поставлено в соответствие число, характеризующее уровень эмоционального фона. Чтобы избежать субъективности в оценке поведенческих реакций испытуемых, за каждым ребенком наблюдали не менее 10 студентов. Затем полученные результаты на каждом временном промежутке усреднялись.

Оказалось, что поведенческие реакции на действия учителя у ребят подготовительной группы детского сада имеют незначительное рассеяние и можно обобщить результаты для всей группы.

Диаграмма рассеяния эмоционального фона группы детей показана на рис. 1. Прямой, отражающей динамику эмоционального состояния детей, является график функции $y = -0,0736x + 2,4896$ с величиной аппроксимации $R^2 = 0,8296$ [2].

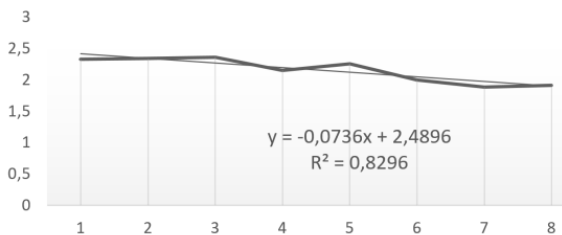


Рис. 1

Очевидным является небольшой спад эмоционального фона в конце наблюдаемого периода.

Таким образом, обнаружена линейная зависимость эмоционального фона обучающихся, а именно его убывание с течением времени, необходимо учитывать при планировании занятий математики с целью повышения качества образования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Караханян К.Г.* Сущность проблемы организации психологической поддержки учебной деятельности / Моск. гос. психолого-пед. ун-т // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2016. № 11-2. С. 134-136.
2. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студентов вузов, обучающихся по экон. специальностям. М.: ЮНИТИДНА, 2012. 504 с.
3. *Мороз В.В.* Эмоции как аксиологический фактор развития креативности студентов университета [Электронный ресурс] / Оренбургский гос. ун-т // Наукоедение. 2015. Т.7, №1(26). Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/09PVN115.pdf>

УДК 378

В. А. Башкин¹, М. А. Башкин²

¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, г. Ярославль, *e-mail: bas@uniyar.ac.ru*

²Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, *e-mail: mbashkin@rsatu.ru*

О ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА БЕЗОПАСНОСТИ ПЕРЕКРЕСТКОВ В КУРСЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Рассматривается применение метода анализа конфликтности транспортных развязок Шнабеля-Лозе в курсе дискретной математики.

Ключевые слова: *дискретная математика, дорожная сеть, транспортный поток, конфликтная точка.*

V. A. Bashkin¹, M. A. Bashkin²

¹*P.G.Demidov Yaroslavl State University
Russia, Yaroslavl, e-mail: bas@uniyar.ac.ru*

²*P.A.Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: mbashkin@rsatu.ru*

THE APPLICATION TASK SAFETY ANALYSIS OF INTERSECTIONS IN THE COURSE OF DISCRETE MATHEMATICS

We consider the application of Schnabel-Lohse method of analyzing of the conflictness of traffic junctions in the study of discrete mathematics.

Keywords: *discrete mathematics, road network, transport stream, conflict point.*

При изучении дискретной математики полезно рассматривать примеры, иллюстрирующие применение ее методов для решения практических задач. В современных условиях важнейшей составляющей городской жизни является автомобильный транспорт, поэтому очень легко заинтересовать учащихся различными вопросами, связанными с моделированием и анализом потоков и развязок уличной сети.

Традиционно к задачам моделирования транспортных потоков относят всевозможные варианты классической транспортной задачи, а также микроскопические и макроскопические модели движения в потоке [1], основными целевыми функциями которых являются оптимизация пропускной способности и экологического ущерба. К сожалению, все соответст-

вующие интересные варианты прикладных задач либо не вполне вписываются в курс дискретной математики (например, задачи с непрерывными функциями затрат), либо достаточно трудоёмки для реализации студентами в условиях ограниченного времени на самостоятельную работу (например, модели движения в потоке и модели развязок на основе клеточных автоматов). В связи с этим мы предлагаем использовать в учебном процессе не задачи моделирования и оптимизации транспортных потоков, а достаточно простые (и даже более интересные для студентов) вопросы, связанные с оценкой безопасности движения в условиях конкретной дорожной сети. Отличительной особенностью такой постановки является возможность для студента самостоятельно выбрать интересные ему перекрёстки/развязки, а также использование реальных данных о потоках транспорта, собранных лично студентом – непосредственно на улице или через веб-камеры.

Дорожная сеть любого города постоянно изменяется. При этом актуальной является задача оценки происходящих изменений с точки зрения аварийности, чтобы иметь возможность выявить негативные факторы, влияющие на безопасность дорожного движения (БДД), и обоснованно разрабатывать управляющие воздействия на транспортную ситуацию для предотвращения ДТП и их последствий. Для оценки БДД применяются различные методы, основанные на определении показателей, которые характеризуют защищенность участников движения. Исследования ДТП показали, что наибольшее их число происходит в так называемых конфликтных точках, т.е. в местах пересечения, отклонения или слияния (разделения) транспортных потоков. Одним из таких методов является метод, предложенный в 1980 г. немецкими учеными В. Шнабелем и Д. Лозе [2]. Насколько нам известно, ранее эта модель не использовалась в учебном процессе дисциплины дискретной математики.

Метод основан на анализе конфликтных ситуаций. Мы применим этот метод для оценки аварийности развязки улиц Крестовая – Бульварная – Горького – Большая Казанская – Волжский мост в Рыбинске. В конце 2016 года была проведена реорганизация этой развязки. Поэтому интересно оценить произошедшие изменения с точки зрения существующей в настоящее время транспортной ситуации. В задаче используется статистика, собранная нами в сентябре 2017 года с использованием методики, описанной в [3] (потребовалось менее одного часа наблюдений с использованием видеофиксации).

Рассмотрим схему движения с нанесенными конфликтными точками, существовавшую до 2017 года – **схему 1** (рис. 1). Здесь указана интенсивность потока по каждой полосе, и каждой конфликтной точке приписано значение интенсивности M_{\min} только минимального из конфликтующих в данной точке потоков (число, приписанное узлу).

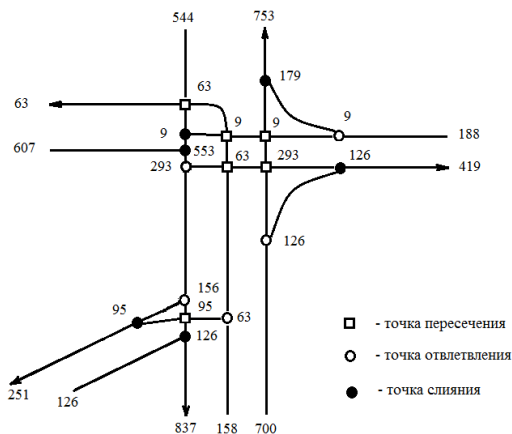


Рис. 1. Схема движения 1

Следуя методике Шнабеля–Лозе, введем коэффициенты опасности K_o в зависимости от типа маневра: точка пересечения – 12, слияние слева – 5 (эти точки более опасны в связи с левосторонним расположением водителя за рулем), слияние справа – 4, ответвление – 2. Тогда общий показатель конфликтности $A_1 = \sum_{i=1}^n K_o G_i$, где $G_i = (K_o M_{\min}) / 10^4$ – показатель конфликтности для i -той конфликтной точки. Проведя вычисление, получаем $A_1 = 334,1533$.

После реорганизации схема движения приняла вид (схема 2), изображенный на рис. 2.

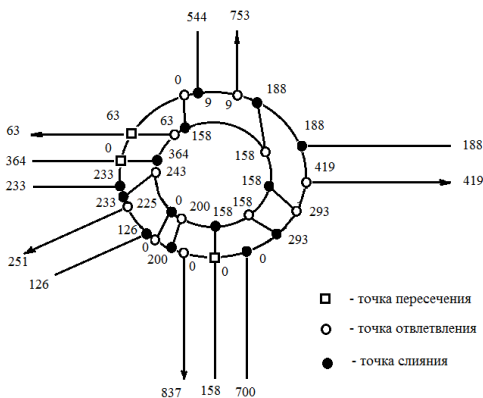


Рис. 2. Схема движения 2

Проведя аналогичные вычисления, получаем $A_2 = 326,7450$. Таким образом, конфликтность развязки уменьшилась на 2,2%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гасников А.В.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие / А.В. Гасников, С.Л. Кленов, Е.А. Нурминский, Я.А. Холодов, Н.Б. Шамрай. 2-е изд., испр. и доп. М.: МЦНМО, 2013. 429 с.
2. *Schnabel W.* Grundlagen der Strassenverkehrstechnik und der Verkehrsplanung. 3-Volstaending ueberarbeitete Auflage / W. Schnabel, Dieter Lohse. DIN, Kirschaum, Beuth. Berlin, Wien, Zuerich, 2011. Band 1. 619 p., Band 2. 632 p.
3. *Клинковштейн Г.И.* Организация дорожного движения: Учебник для вузов / Г.И. Клинковштейн, М.Б. Афанасьев. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Транспорт, 2001. 347 с.

УДК 517

А. В. Васильева, М. А. Башкин, А. И. Бурцев, Л. В. Березина

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: anz1854@yandex.ru, m_bashkin@list.ru,
byrzev@rsatu.ru, berezina_lv@pisem.net

ЗАДАЧИ XVI ОТКРЫТОЙ ОБЛАСТНОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ЯРОСЛАВСКОЙ ОБЛАСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ

В статье представлены задачи XVI открытой областной студенческой олимпиады по математике. Приведены их решения и статистика результатов.

Ключевые слова: олимпиадные задачи, научное творчество студентов, математическая подготовка.

A. V. Vasileva, M. A. Bashkin, A. I. Burzev, L. V. Berezina

P. A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: anz1854@yandex.ru, m_bashkin@list.ru,
byrzev@rsatu.ru, berezina_lv@pisem.net

TASKS XVI THE OPEN REGIONAL STUDENT COMPETITION OF THE YAROSLAVL REGION IN MATHEMATICS

The article presents the tasks of the XVI open regional student Olympiad in mathematics. Their solutions and statistics of the results are given.

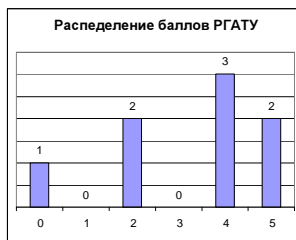
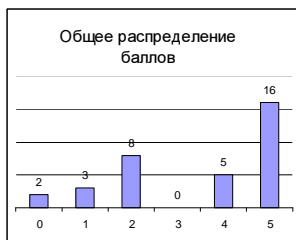
Keywords: Olympiad problems, the scientific creativity of students, mathematical training.

В этой статье мы представляем анализ результатов решения задач XVI открытой областной олимпиады, прошедшей в стенах Рыбинского государственного авиационного технического университета им. П. А. Соловьева. Анализ каждой задачи осуществлялся исходя из количества команд, представивших ее решение. Каждая команда состояла из двух человек и представляла на суд жюри олимпиады общее решение. Всего в олимпиаде принимали участие 36 команд, 8 команд представляли рыбинский университет. Для некоторых задач в работе приводятся развернутые решения.

Задача 1. Найти решения неравенства $5|x^2 - 5x + 4| \geq 4x$.

Ответ: $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right] \cup \left[\frac{21 - \sqrt{41}}{10}, \frac{21 + \sqrt{41}}{10}\right] \cup [5, +\infty)$.

Задача 1 оценивалась в 5 баллов. Её пытались решать 34 команды, 8 команд из РГАТУ. Следующие диаграммы показывают распределение баллов.

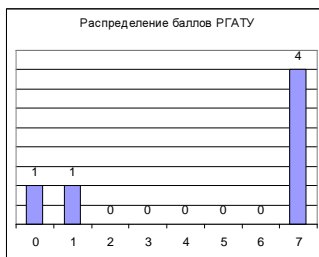
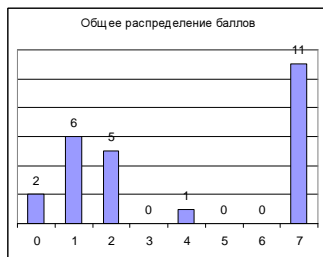


Задача 2. Найти сумму квадратов корней уравнения

$$(x^2 + 2x)^2 - 2015(x^2 + 2x) + 2016 = 0.$$

Ответ: 4038.

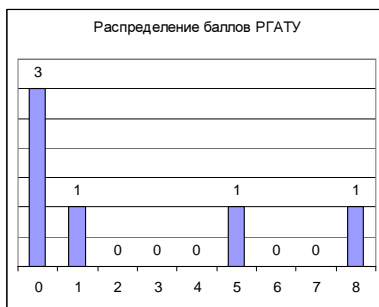
Задача 2 оценивалась в 7 баллов. Вторую задачу пытались решать 25 команд, 6 команд из РГАТУ. Следующие диаграммы показывают распределение баллов.



Задача 3. Сравнить числа $\sqrt[3]{\sqrt{5+2}} - \sqrt[3]{\sqrt{5-2}}$ и 1.

Ответ: $\sqrt[3]{\sqrt{5+2}} - \sqrt[3]{\sqrt{5-2}} = 1$.

Задача 3 оценивалась в 8 баллов. Третью задачу пытались решать 28 команд, 6 команд из РГАТУ. Следующие диаграммы показывают распределение баллов.



Задача 4. Найти функции $f(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) \equiv x \text{ при } x \neq 0 \text{ и } x \neq 1.$$

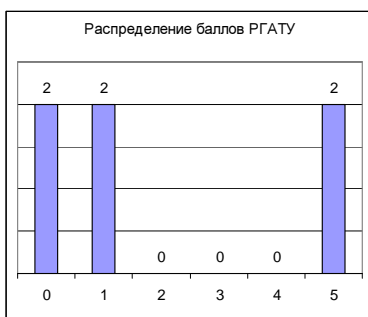
Ответ: $f(x) \equiv \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{1-x} + \frac{x-1}{x} \right).$

Задача 4 оценивалась в 10 баллов. Эту задачу пытались решать 5 команд, 3 из которых набрали по 0 баллов, и две набрали 2 и 9 баллов. 9 баллов получили Коновалов Александр и Белов Никита, учащиеся математического факультета ЯрГУ им. П.Г. Демидова. Единственная команда из РГАТУ, бравшаяся за 4 задачу, получила 0 баллов.

Задача 5. $f(x) = x^2 \cdot \begin{vmatrix} x^2 & x^2 e^{-x} & x e^{-2x} & e^{-3x} \\ x^2 e^x & 2x & e^{-x} & x^{-1} e^{-2x} \\ x e^{2x} & e^x & 3x^{-1} & x^{-1} e^{-x} \\ e^{3x} & x^{-1} e^{2x} & x^{-2} e^x & 4x^{-3} \end{vmatrix}$. Найти $f'(1)$.

Ответ: $f'(1) = 18$.

Задача 5 оценивалась в 5 баллов. Эту задачу пытались решать 26 команд, 6 команд из РГАТУ. Следующие диаграммы показывают распределение баллов.



Задача 6. Матрица $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{3}} & -\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ \sqrt{2-\sqrt{3}} & \sqrt{2+\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Найти наименьшее положительное целое значение n , при котором выполняется равенство $A^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = 1$. Следовательно,

$\cos \varphi = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$, $\sin \varphi = \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$ для некоторого φ .

$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} > 0$, $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} > 0$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} > \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \sin \varphi$. Следова-

тельно, можно считать, что $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $2\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$2 \sin \varphi \cos \varphi = 2 \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Отсюда $\sin 2\varphi = \frac{1}{2}$ и

$2\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому можно считать $\varphi = \frac{\pi}{12}$. Обозначим

$$B(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad A = 2B\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Равенство $B(\varphi_1)B(\varphi_2) = B(\varphi_1 + \varphi_2)$ проверяется прямыми вычислениями. По индукции $(B(\varphi))^n = B(n\varphi)$. ($B(\varphi)$ – матрица линейного оператора поворота вокруг начала координат на угол φ).

$$A^n = 2^n \left(B\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)^n = 2^n B\left(\frac{n\pi}{12}\right) = 2^n \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{12} & -\sin \frac{n\pi}{12} \\ \sin \frac{n\pi}{12} & \cos \frac{n\pi}{12} \end{pmatrix}.$$

По условию $A^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{12} & -\sin \frac{n\pi}{12} \\ \sin \frac{n\pi}{12} & \cos \frac{n\pi}{12} \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отсюда

$$\cos \frac{n\pi}{12} = 1, \sin \frac{n\pi}{12} = 0. \text{ Следовательно, } \frac{n\pi}{12} = 2k\pi \text{ и } n = 24k, k \in \mathbf{N}.$$

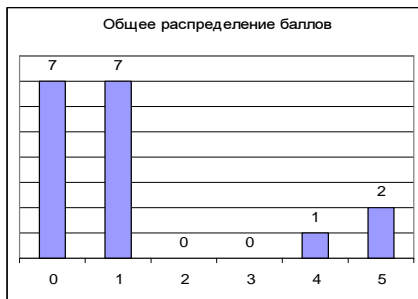
Ответ: 24.

Задача 6 оценивалась в 13 баллов. Эту задачу пытались решать 16 команд. 11 команд получили 0 баллов, 5 команд – 4 балла. Единственная команда из РГАТУ, бравшаяся за эту задачу, представила решение на 0 баллов.

Задача 7. Найти центр и радиус окружности $\begin{cases} x + 2y + 2z = 19, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 10y. \end{cases}$

Ответ: $C(1, 7, 2), r = 4$.

Задача 7 оценивалась в 5 баллов. Эту задачу пытались решать 17 команд, 2 команды из РГАТУ (0 и 5 баллов). Следующая диаграмма показывает распределение баллов.



Задача 8. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ Найти $f'(0)$.

Ответ: $f'(0) = 0$.

Задача 8 оценивалась в 6 баллов. Эту задачу пытались решать 19 команд, 4 команды из РГАТУ (каждая по 0 баллов). Следующая диаграмма показывает общее распределение баллов.



Задача 9. Пусть функция $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ дифференцируема. Доказать, что найдётся точка $t \in [0,1]$ такая, что $f(1) - f(0) = \frac{\pi}{2} \sqrt{1-t^2} f'(t)$.

Решение. Рассмотрим функцию $g(x) = f(\sin x)$. Эта функция непрерывна и дифференцируема на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$. По теореме Лагранжа

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0) = g'(s)\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = g'(s) \frac{\pi}{2}, \quad \text{где} \quad s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0) = f(1) - f(0). \quad g'(s) = f'(\sin(s)) \cdot \cos(s). \quad \text{Обозначим}$$

$$t = \sin(s). \quad s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0,1]. \quad \cos(s) = +\sqrt{1 - \sin^2 s} = \sqrt{1 - t^2}. \quad \text{Та-$$

ким образом, $g'(s) = f'(\sin(s)) \cdot \cos(s) = f'(t) \sqrt{1 - t^2}$ и

$$g'(s) \frac{\pi}{2} = f'(t) \sqrt{1 - t^2} \frac{\pi}{2}, \quad \text{где} \quad t \in [0,1]. \quad \text{Теперь}$$

$$f(1) - f(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0) = g'(s)\frac{\pi}{2} = f'(t)\sqrt{1-t^2}\frac{\pi}{2}.$$

Задача 9 оценивалась в 10 баллов. Эту задачу пытались решать 5 команд, 0 команд из РГАТУ. Четыре команды получили по 0 баллов. Одна команда набрала 10 баллов (Коновалов А. и Белов Н., ЯрГУ).

Задача 10. Найти $\int_0^{2\pi} \arccos(\sin(2x))dx$.

Ответ: π^2 .

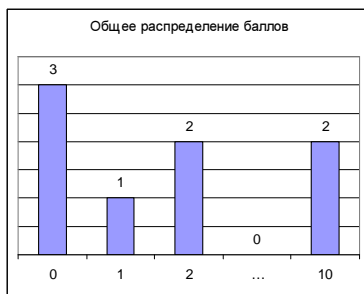
Задача 10 оценивалась в 8 баллов. Эту задачу пытались решать 17 команд, 3 команды из РГАТУ (две команды набрали по 0 баллов, Каленов Александр и Жигунова Екатерина – 8 баллов). Следующая диаграмма показывает общее распределение баллов.



Задача 11. Найти наибольшее значение функции $y(x)$ на отрезке $[1,5]$, удовлетворяющей условиям $y''y = (y')^2 - 2y^2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

Ответ: $1/e$ ($y = 3e^{-x^2}$).

Задача 11 оценивалась в 10 баллов. Эту задачу пытались решать 8 команд, 1 команда из РГАТУ (получила за решение 0 баллов). Следующая диаграмма показывает общее распределение баллов.



Задача 12. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} \right)$ на сходимость.

Решение. Пусть $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$, $v_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – сходящийся ряд Дирихле. Сравним ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Сравним ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} = x \right|_{n \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow +0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x - \sqrt{\ln(1+x^2)}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 - \ln(1+x^2)}{x^2 \left(x + \sqrt{\ln(1+x^2)} \right)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 - \ln(1+x^2)}{1 + \frac{x^2}{\sqrt{\ln(1+x^2)}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 - \ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(1 + \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(1 + \sqrt{\ln(1+x^2)} \frac{1}{x^2} \right) = 2 \quad \text{и, следовательно,}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{4}$. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся одновременно.

Ответ: сходится.

Задача 12 оценивалась в 13 баллов. Эту задачу пытались решать 6 команд (2 команды получили по 0 баллов, три – по 3 балла, одна – 5 баллов), команды из РГАТУ решений не представили.



Из приведенных данных видно, что лучше всего решали первую задачу (выборочное среднее 0,7), чуть хуже 2 и 5 (0,554 и 0,585 соответственно). Самыми сложными оказались 6 и 8 задачи (выборочное среднее 0,096 и 0,140 соответственно).

УДК 51-7

Н. И. Гусарова, А. В. Гусаров, Е. В. Олейникова

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: gusarova-73@mail.ru, alvgus@mail.ru,
ev.olejnikova@yandex.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ И СБОРКЕ ПРОМЫШЛЕННЫХ ИЗДЕЛИЙ

В статье рассматриваются варианты преподавания дисциплин математического цикла для различных специальностей технического вуза. Приведены конкретные примеры решения производственных задач, которые демонстрируют использование основных математических моделей.

Ключевые слова: междисциплинарные связи, математическая модель, статический расчет системы амортизации, индивидуальный подбор.

N. I. Gusarova, A. V. Gusarov, E. V. Oleynikova

*P. A. Solovyov Rybinsk State University of Aviation Technology
Russia, Rybinsk, e-mail: gusarova-73@mail.ru, alvgus@mail.ru,
ev.olejnikova@yandex.ru*

THE USE OF MATHEMATICAL TOOLS IN THE DESIGN AND ASSEMBLY OF INDUSTRIAL PRODUCTS

The article discusses the features of teaching the disciplines of the mathematical cycle for various specialties of technical University. Specific examples of solving production problems are given, which demonstrate the use of basic mathematical models.

Keywords: interdisciplinary connections, mathematical model, static calculation of the depreciation system, individual selection.

Современный выпускник технического вуза должен владеть обширным запасом знаний в области дисциплин естественнонаучного цикла, а

также навыками привлечения этих знаний к решению прикладных задач. Математика в этом списке традиционно занимает одну из ведущих позиций. Но, поскольку преподавание математики ведется на младших курсах, студенты еще не знают конкретных производственных проблем, для решения которых им бы могли потребоваться теоретические математические знания. Поэтому для повышения заинтересованности обучающихся очень важно приводить ситуации, в которых математика является основным инструментом инженера. Целесообразно совместно со специалистами выпускающих кафедр разработать ряд примеров по каждому разделу математики, которые наглядно демонстрируют применение математического аппарата в инженерной практике.

Приведем решение нескольких прикладных задач, предложенных кафедрами вычислительных систем и управления качеством.

Амортизация конструкции радиоэлектронной аппаратуры

Один из эффективных методов повышения устойчивости конструкции к воздействию вибраций, а также ударных и линейных нагрузок – использование амортизаторов [5]. Действие амортизаторов основано на демпфировании резонансных частот, т. е. поглощении части колебательной энергии. Выбор схемы расположения амортизаторов зависит главным образом от расположения аппаратуры на носителе и условий динамического воздействия. Для создания рациональной системы амортизации рекомендуется максимально приблизить центр жесткости (ЦЖ) системы амортизации к центру тяжести устройства. На рис. 1 представлены основные схемы расположения амортизаторов.

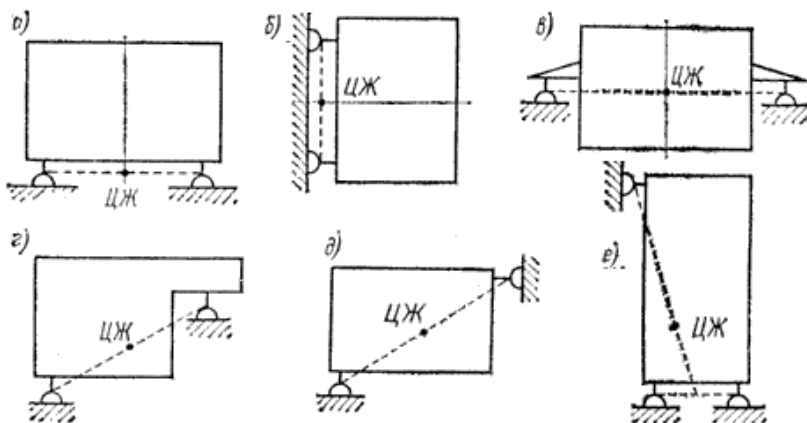


Рис. 1. Основные схемы расположения амортизаторов

Целью статического расчета системы амортизации является определение статических нагрузок на каждый из амортизаторов и последующий выбор типоразмера амортизатора в соответствии с найденными нагрузками. В ряде случаев необходимо определить координаты расположения амортизаторов. Это позволит расположить амортизаторы в соответствии с условиями рационального монтажа. Вариант *a*) удобен с позиций общей компоновки блоков на объекте. Однако при этом расположении амортизаторов принципиально невозможно получить совпадение центра тяжести с центром жесткости и не получить рациональной системы. То же можно сказать про вариант размещения *б*). Вариант размещения *в*) позволяет получить рациональную систему, однако такое расположение амортизаторов не всегда удобно при размещении на объекте. Размещение типа *з*) и *д*) является разновидностью варианта *в*) и используется в том случае, если лицевая панель блока размещается вблизи амортизатора, расположенного снизу. Размещение амортизаторов типа *е*) используется в стоечной аппаратуре, когда высота РЭА значительно больше глубины и ширины стойки.

Центр тяжести объекта принимается за начало прямоугольной системы координат X, Y, Z , оси которой направлены по главным центральным осям инерции объекта. Предполагается, что объект монтируется на амортизаторах таким образом, что координатная плоскость XOZ располагается горизонтально, а ось Y – вертикально.

Приведем расчет статических нагрузок для варианта *a*) при четырех амортизаторах, расположенных в горизонтальной плоскости (рис. 2).

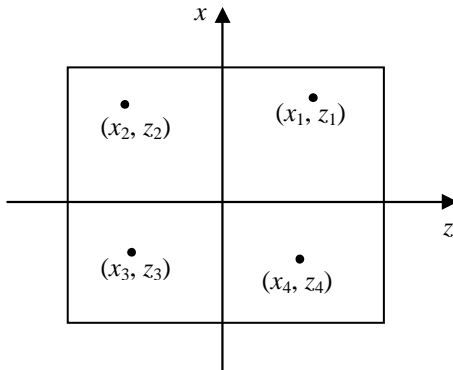


Рис. 2. Схема расположения четырех амортизаторов в горизонтальной плоскости

Вертикальная координата y равна нулю. При заданных значениях координат (x_i, z_i) точек крепления амортизаторов получаем систему четырех линейных уравнений относительно неизвестных нагрузок P_i .

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = G; \\ z_1 \cdot P_1 + z_2 \cdot P_2 + z_3 \cdot P_3 + z_4 \cdot P_4 = 0; \\ x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + x_3 \cdot P_3 + x_4 \cdot P_4 = 0; \\ z_1 \cdot x_1 \cdot P_1 + z_2 \cdot x_2 \cdot P_2 + z_3 \cdot x_3 \cdot P_3 + z_4 \cdot x_4 \cdot P_4 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь G – вес объекта.

Решая систему (1) по формуле Крамера [1], получаем

$$P_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad P_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad P_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad P_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ z_1 \cdot x_1 & z_2 \cdot x_2 & z_3 \cdot x_3 & z_4 \cdot x_4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} G & 1 & 1 & 1 \\ 0 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & z_2 \cdot x_2 & z_3 \cdot x_3 & z_4 \cdot x_4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & G & 1 & 1 \\ z_1 & 0 & z_3 & z_4 \\ x_1 & 0 & x_3 & x_4 \\ z_1 \cdot x_1 & 0 & z_3 \cdot x_3 & z_4 \cdot x_4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & G & 1 \\ z_1 & z_2 & 0 & z_4 \\ x_1 & x_2 & 0 & x_4 \\ z_1 \cdot x_1 & z_2 \cdot x_2 & 0 & z_4 \cdot x_4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & G \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ z_1 \cdot x_1 & z_2 \cdot x_2 & z_3 \cdot x_3 & 0 \end{vmatrix} -$$

определители четвертого порядка, составленные из коэффициентов системы (1).

Аналогичные системы можно составить и решить для остальных схем расположения амортизаторов при любом их числе.

Повышение качества сборки в машиностроении

Наиболее существенные требования к качеству сборки деревообрабатывающего станка состоят в обеспечении минимального зазора между опорными поверхностями четырех корпусов-опор и нижней поверхностью подвижного фуговального стола. С точки зрения теории базирования, одна из этих опор «лишняя», поскольку, для построения плоскости достаточно трех точек. Стол своей нижней опорной поверхностью устанавливается на три наиболее высоких опоры, а четвертая опора этой поверхности, в об-

шем случае, не касается. Образуется зазор, значение которого нужно минимизировать. Для решения этой задачи была предложена модификация метода индивидуального подбора [2, 3].

Математическая модель этого процесса использует аппарат аналитической геометрии. Центры верхних площадок опор являются вершинами четырехугольника $K_1K_2K_3K_4$ в пространстве. Привяжем к ним прямоугольную систему координат, как показано на рис. 3.

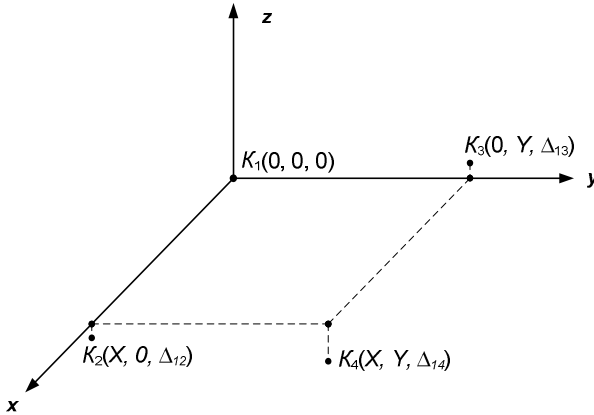


Рис. 3. Образование величины замыкающего звена для задачи подбора корпусов-опор первого комплекта

Значения координат x и y одинаковы для всех станков и определяются конструкторской документацией. Координата z для каждого корпуса-опоры имеет вид

$$\Delta_{ij} = d_{ij} - d_{i1}. \quad (2)$$

Здесь i – номер подбираемого комплекта деталей; $j = 1 \dots 4$ – номер подбираемого корпуса-опоры; d_{ij} – высота корпуса-опоры из i -го комплекта, соответствующего точке K_j .

Тогда центры верхних площадок корпусов-опор будут иметь следующие координаты: $K_1(0, 0, 0)$, $K_2(X, 0, \Delta_{12})$, $K_3(0, Y, \Delta_{13})$, $K_4(X, Y, \Delta_{14})$.

Уравнение плоскости $K_1 K_2 K_3$ имеет вид [1]

$$Y \cdot \Delta_{i2} \cdot x + X \cdot \Delta_{i3} \cdot y - X \cdot Y \cdot z = 0.$$

Отклонение ρ точки K_4 от этой плоскости можно определить следующим образом:

$$\rho = \frac{X \cdot Y \cdot \Delta_{i2} + X \cdot Y \cdot \Delta_{i3} \cdot y - X \cdot Y \cdot \Delta_{i4}}{\sqrt{(Y \cdot \Delta_{i2})^2 + (X \cdot \Delta_{i3})^2 + (X \cdot Y)^2}} =$$

$$= (\Delta_{i2} + \Delta_{i3} - \Delta_{i4}) \cdot \frac{X \cdot Y}{\sqrt{(Y \cdot \Delta_{i2})^2 + (X \cdot \Delta_{i3})^2 + (X \cdot Y)^2}} \quad (3)$$

Положение точки K_4 относительно плоскости $K_1K_2K_3$ определяется знаком отклонения ρ , а именно, если $\rho = 0$, то точка K_4 лежит в плоскости $K_1K_2K_3$, если $\rho < 0$, то точка лежит над плоскостью, если $\rho > 0$, то точка лежит ниже плоскости. Обозначим размеры каждого из корпусов-опор комплекта, участвующих в формировании сборочной размерной цепи, соответственно A_1, A_2, A_3, A_4 .

Все возможные $4! = 24$ варианта размещения корпусов-опор по вершинам четырехугольника $K_1K_2K_3K_4$, в соответствии с комбинаторным алгоритмом полного перебора [1], представлены в таблице 1.

Таблица 1. Варианты расположения корпусов-опор для одного комплекта

i	$K_1K_2K_3K_4$	i	$K_1K_2K_3K_4$	i	$K_1K_2K_3K_4$	i	$K_1K_2K_3K_4$
1	$A_1A_2A_3A_4$	7	$A_2A_1A_3A_4$	13	$A_3A_1A_2A_4$	19	$A_4A_1A_2A_3$
2	$A_1A_2A_4A_3$	8	$A_2A_1A_4A_3$	14	$A_3A_1A_4A_2$	20	$A_4A_1A_3A_2$
3	$A_1A_3A_2A_4$	9	$A_2A_3A_1A_4$	15	$A_3A_2A_1A_4$	21	$A_4A_2A_1A_3$
4	$A_1A_3A_4A_2$	10	$A_2A_3A_4A_1$	16	$A_3A_2A_4A_1$	22	$A_4A_2A_3A_1$
5	$A_1A_4A_2A_3$	11	$A_2A_4A_1A_3$	17	$A_3A_4A_1A_2$	23	$A_4A_3A_1A_2$
6	$A_1A_4A_3A_2$	12	$A_2A_4A_3A_1$	18	$A_3A_4A_2A_1$	24	$A_4A_3A_2A_1$

Ниже приведен алгоритм выбора оптимального комплекта.

1. Все имеющиеся на складе корпуса измеряются и маркируются.
2. Выбирается произвольно один корпус. Затем для него выбираются поочередно три корпуса так, чтобы величины замыкающих звеньев первого корпуса с остальными корпусами-опорами были минимальны из всех имеющихся в наличии деталей. Корпуса нумеруются внутри комплекта произвольным образом.
3. Для данной нумерации корпусов вычисляются координаты положения в соответствии с рис. 3 по формуле (2).
4. Вычисляется отклонение ρ по формуле (3), и его значение для данной нумерации корпусов запоминается.
5. Перенумеровываем корпуса в комплекте в соответствии со схемой перестановки из таблицы 1 и повторяем пункты 3 и 4. Процедура вычисления отклонения ρ повторяется для каждого из 24 способов взаимного расположения корпусов-опор.

6. Из всех полученных 24 значений ρ выбирается наименьшее неотрицательное число. Расположение корпусов-опор для данного ρ запоминается и вносится в базу данных для сборки.

7. После выбора очередного комплекта участвующие в нем корпуса-опоры удаляются из рассмотрения, и процесс комплектации повторяется, начиная с пункта 2, для оставшихся деталей.

На практике этот алгоритм был реализован для 400 корпусов-опор, из которых были подобраны 100 комплектов. Проведенный статистический анализ качества сборки показал, что распределение величины ρ при моделировании различных партий из 400 корпусов во всех случаях соответствует нормальному закону с параметрами $\rho_{\text{ср}}$ и σ [1, 4]. Вероятность необходимости регулировки вычисляется как вероятность попадания нормальной случайной величины за пределы интервала требуемых допусков (0; +0,2). С вероятностью более 0,99 метод подбора обеспечивает в заданных условиях требуемое качество без необходимости регулировки. Более того, в подавляющем количестве вариантов достигаемое качество существенно превосходит заданные требования и вероятность того, что придется производить регулировку, пренебрежимо мала.

Таким образом, при решении конкретных инженерных задач потребовалось использовать методы сразу четырех дисциплин математического блока: линейной алгебры, аналитической геометрии, дискретной математики и математической статистики. Преподавателю необходимо акцентировать внимание студентов на таких удачных примерах взаимодействия теории и практики. Это приводит к повышению мотивации при изучении математики, что в конечном итоге оказывает существенное влияние на уровень математической образованности выпускника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. М.: АСТ: Астрель, 2006. 991 с.
2. *Майорова Е. А.* Исследование возможностей повышения качества сборки путем использования индивидуального подбора деталей / Е. А. Майорова, В. В. Непомилуев // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2006. № 10. С. 34-38.
3. *Олейникова Е. В.* Разработка функциональной модели образования погрешности при использовании метода подбора // Изв. Юго-Западного гос. ун-та. Сер. Техника и технологии. 2014 . № 4. С. 28-32.
4. *Непомилуев В. В.* Вероятностно-статистическая модель процесса индивидуального подбора деталей / В. В. Непомилуев, Е. В. Олейникова, Н. И. Гусарова // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2015. № 1. С. 8-13.
5. *Билибин, К. И.* Конструкторско-технологическое проектирование электронной аппаратуры: учебник для вузов / К. И. Билибин, А. И. Власов, Л. В. Журавлева, и др.; под общ. ред. В. А. Шахнова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. 564 с.

УДК 519.25.004.02

А. С. Ермишин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ermishinas@ystu.ru

РЕАЛИЗАЦИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В УПРАВЛЕНИИ КАЧЕСТВОМ ПРОДУКЦИИ И ПРОЦЕССОВ

В статье рассматриваются вопросы реализации компьютерных технологий в программно-статистических комплексах при использовании статистических методов в решении задач управления качеством продукции и процессов. Приводятся примеры расчёта и применения некоторых инструментов управления качеством.

Ключевые слова: *диаграмма Парето, контрольные карты Шухарта, множественная регрессия, программно-статистический комплекс, компьютерные технологии.*

A. S. Ermishin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: ermishinas@ystu.ru

THE REALIZATION OF COMPUTER TECHNOLOGY IN QUALITY MANAGEMENT OF PRODUCTS AND PROCESSES

The paper considers the questions of realization of computer technology in software and statistical units in the use of statistical methods in solving problems of quality management of products and processes. We give examples of calculating and using some quality management instruments.

Keywords: *Pareto chart, Shewhart charts, multiple regression, software, statistical package, computer technology.*

Статистические методы помогают систематически находить проблемы в области качества и решать их, определять какие из проблем носят случайный или постоянный характер. Такая систематизация причин позволяет выявить наиболее проблемные места в системе управления организацией, так называемые «узкие места» и эффективно построить организационную структуру [1].

В управлении качеством продукции и услуг статистические методы по праву занимают одно из важнейших мест. При этом очень важно научить использовать специальные компьютерные технологии. Необходимо уметь пользоваться широко распространёнными средствами, это, конечно же, электронные таблицы MS Excel и пакет программ Statistica, а также

MATHEMATICA, SAS, SPSS, Stadia, STATGRAPHICS PLUS и другими пакетами программ в среде Windows.

Мы приведём несколько примеров использования инструментов программно-статистических комплексов в среде Windows для обработки информации о качестве продукции и процессов.

Пример 1. Необходимо выявить причины немногочисленных существенно важных дефектов (несоответствий). Для этого данные контрольного листа, например, по дефектам деталей заносятся в базу, отсортировываются по убыванию, затем считается накопленное количество случаев выявления тех или иных несоответствий по видам и определяется процент накопленных частот дефектов (табл. 1).

Таблица 1. Отсортированные данные для диаграммы Парето

Дефект	Итого	Накопленное количество	Накопленный процент
Надрезы	78	78	40,41
Трещины	46	124	64,25
Выщерблены	21	145	75,13
Деформация	14	159	82,38
Вмятины	10	169	87,56
Раковины	9	178	92,23
Сколы	8	186	96,37
Прочие	7	193	100,00
Итого	193	–	–

На основании обработанных данных, строится Диаграмма Парето (рис. 1).

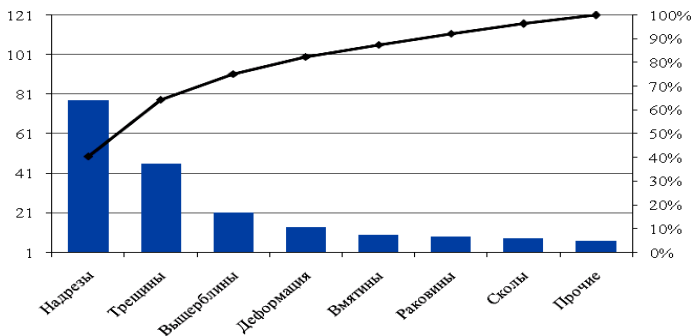


Рис. 1. Диаграмма Парето

По данной диаграмме Парето можно сказать, что 64,25 % дефектов – это надрезы и трещины. Именно на устранение этих несоответствий следует обратить особое внимание при производстве деталей.

Пример 2. Нам необходимо построить контрольные карты Шухарта для контроля содержания хрома в стальных отливках. Для этого в каждую смену проводились замеры в четырёх плавках (x_1, x_2, x_3, x_4).

Заносим все первичные данные контрольных листов в базу, рассчитываем средние значения (\bar{x}) и стандартные отклонения (s) для каждой подгруппы стандартными методами. Затем вычисляем общее среднее значение ($\bar{\bar{x}}$) и среднее стандартное отклонение (\bar{s}).

Верхнюю $UCL_{\bar{x}}$ и нижнюю $LCL_{\bar{x}}$ контрольные границы для величины \bar{x} и верхнюю UCL_s и нижнюю LCL_s контрольные границы для величины s рассчитываем по методике, изложенной в ГОСТ Р 50779.42-99 (ИСО 8258-91) через коэффициенты A_3, B_3 и B_4 [3]. Результаты сводим в табл. 2.

Таблица 2. Результаты контроля содержания хрома в стальных отливках и первичная обработка данных

№ пробы	Плавки				\bar{x}	s
	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	0,7401	0,7603	0,6202	0,7301	0,7125	0,0629
2	0,7202	0,7401	0,8400	0,6900	0,7475	0,0650
3	0,8701	0,7901	0,7002	0,9201	0,8200	0,0963
4	0,7803	0,6600	0,7102	0,7401	0,7225	0,0506
5	0,8102	0,6602	0,8200	0,6700	0,7400	0,0868
6	0,6300	0,7100	0,6801	0,8201	0,7100	0,0804
7	0,6303	0,7301	0,6400	0,8000	0,7000	0,0804
8	0,6603	0,6800	0,8501	0,9101	0,7750	0,1240
9	0,6301	0,6602	0,6200	0,8503	0,6900	0,1080
10	0,8500	0,6100	0,7503	0,7700	0,7450	0,0998
11	0,7301	0,6500	0,7400	0,9003	0,7550	0,1047
12	0,8502	0,7701	0,6500	0,6900	0,7400	0,0887
13	0,6700	0,6900	0,8302	0,6202	0,7025	0,0900
14	0,7400	0,7300	0,6203	0,8801	0,7425	0,1066
15	0,8103	0,8201	0,6901	0,7300	0,7625	0,0629

Продолжение таблицы 2

№ пробы	$\bar{\bar{x}}$	$UCL_{\bar{x}}$	$LCL_{\bar{x}}$	\bar{s}	UCL_s	LCL_s
1	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000
2	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000
3	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000
4	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000
5	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000
6	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000
7	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000
8	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000
9	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000
10	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000
11	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000
12	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000
13	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000
14	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000
15	0,7377	0,8795	0,5958	0,0871	0,1975	0,0000

После того, как все статистические характеристики посчитаны, построили контрольные карты Шухарта для средних значений и стандартных отклонений (рис. 2).

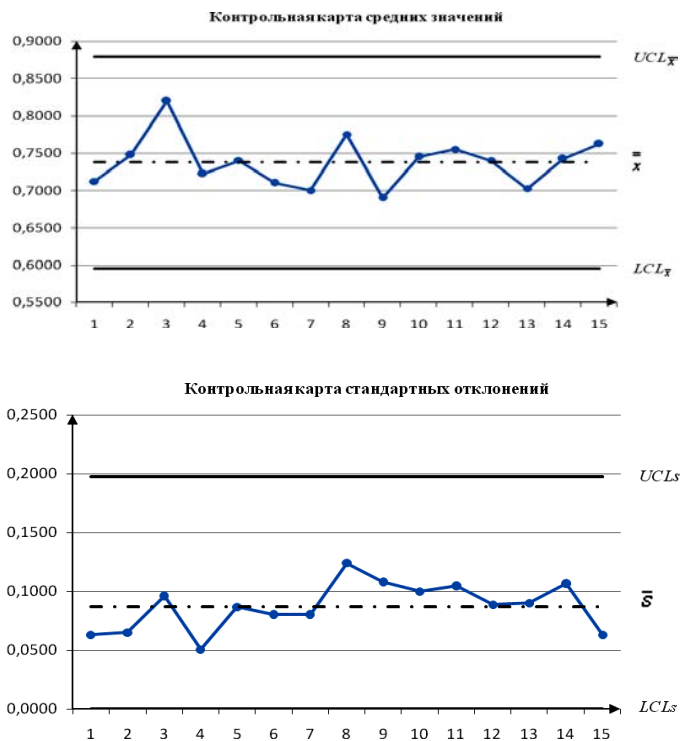


Рис. 2. Контрольные карты Шухарта

В нашем примере мы не стали усложнять контрольные карты другими подмножествами, такими как расчёт дополнительных границ A , B и C .

Как видим, обе построенные карты не указывают на наличие нарушений процесса, а значит, процесс статистически стабилен.

Пример 3. Необходимо произвести расчёт множественной регрессии, чтобы изучить влияние одних факторов на другие. Определим влияние содержания жира (x_1), содержания белка (x_2) и температуры охлаждения в толще мышц (x_3) на бактериальную обсеменённость (y) мяса цыплят-бройлеров.

Для этого мы имеем некоторый объём данных, которых заносим в базу, представленную в табл. 3.

Таблица 3. Данные для вычисления множественной регрессии

№ п/п	y	x ₁	x ₂	x ₃
1	7275	1,65	24,55	4,0
2	7890	2,15	24,84	4,0
3	6995	2,28	24,85	4,0
4	5580	2,74	19,50	4,0
5	7250	3,18	24,70	4,0
6	281	4,25	24,00	1,0
7	359	4,57	26,50	1,0
8	489	4,75	25,50	3,0
9	492	4,93	20,50	2,0
10	325	5,98	21,00	2,0

Результаты расчёта множественной регрессии выдаются, например, в среде Microsoft Excel – в свободной ячейке электронной таблицы в следующей форме (рис. 3).

	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Вывод итогов									
2										
3	Регрессионная статистика									
4	Множественный R	0,962710133								
5	R-квадрат	0,926810801								
6	Нормированный R-квадрат	0,890216201								
7	Стандартная ошибка	1109,755051								
8	Наблюдения	10								
9										
10	Дисперсионный анализ									
11		df	SS	MS	F	Значимость F				
12	Регрессия	3	102964531,1	34654847,71	25,32643641	0,000833715				
13	Остаток	6	8209961,278	1368326,88						
14	Итого	9	112174492,4							
15										
16	Стандартная									
17		Коэффициенты	ошибка	t-статистика	P-значение	Верхние 95%	Верхние 95,0%	Верхние 95,0%	Верхние 95,0%	
18	Y-пересечение	-4278,611257	6060,48679	0,705984751	0,506670727	-10550,86566	19108,0882	-10550,866	19108,088	
19	Переменная X 1	-1346,754011	465,3800231	-2,893880149	0,027533627	-2485,497902	-208,010119	-2485,4979	-208,0101	
18	Переменная X 2	24,86569805	179,0963419	0,138839788	0,894119554	-413,3672625	463,098639	-413,36726	463,09866	
20	Переменная X 3	1290,091756	506,0027894	2,549574396	0,043515567	51,94753663	2528,23598	51,9475366	2528,236	
21										

Рис. 3. Результаты расчёта множественной регрессии

Получили модель следующего вида (коэффициенты для удобства округлили до сотых долей единицы):

$$y = 4278,61 - 1346,75 \cdot x_1 + 24,87 \cdot x_2 + 1290,09 \cdot x_3.$$

Данная модель значима ($F \approx 25,32$), все факторы, за исключение x_2 также значимы (p -значения для переменных 0,05).

Таким образом, один из факторов (регрессоров) x_2 оказался незначим, и его можно исключить из модели. Значит, влияние данного фактора, а именно, содержание белка на бактериальную обсеменённость мяса цыплят-бройлеров не достоверно.

Полученные результаты подтверждаются расчётом коэффициентов корреляции прямым способом и ранговым методом и являются биологически закономерными.

Резюмируя описанное выше, необходимо отметить, что работа в программно-статистических комплексах значительно упрощает и ускоряет решение задач по управлению качеством продукции и процессов. Приведённые примеры расчёта с использованием базовых инструментов управления качеством наглядно это демонстрируют и могут также успешно применяться при написании выпускных квалификационных работ обучающимися по программам бакалавриата, что особенно актуально для заочной и очно-заочной форм обучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ефимов В.В.* Статистические методы в управлении качеством продукции: учебное пособие / В.В. Ефимов, Т.В. Барт. М.: КНОРУС, 2006. 172 с.
2. *Клячкин В.Н.* Статистические методы в управлении качеством: компьютерные технологии: учеб. пособие. М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2009. 304 с.
3. ГОСТ Р 50779.42-99 (ИСО 8258-91). Статистические методы. Контрольные карты Шухарта. Введ. 2000-01-01. М.: Стандартинформ, 2008. 32 с.

УДК 519.725.2

А. Н. Жаров¹, С. В. Овчинников², А. Н. Хожайнов²

¹Ярославский государственный технический университет

²Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны
Россия, г. Ярославль, e-mail: zharovan@ystu.ru,
osv70@yandex.ru, khozhaynov1973@mail.ru

О ПРЕПОДАВАНИИ ТЕМЫ: ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Рассмотрены особенности изложения темы: циклические коды. Указывается на важность изложения материала, посвященного сравнению чисел и многочленов по модулю, приводимости многочленов в поле Гауа.

Ключевые слова: коды, циклические коды, помехоустойчивое кодирование.

A. N. Zharov¹, S. V. Ovchinnikov², A. N. Khozhainov²

¹Yaroslavl State Technical University,

²Yaroslavl Higher Military School of Air Defense,
Russia, Yaroslavl, e-mail: zharovan@ystu.ru
osv70@yandex.ru, khozhaynov1973@mail.ru

ABOUT THE TEACHING OF THE THEME: CYCLIC CODES

It is examined the features of studying of the topic: cyclic codes. Points to the importance of presentation material on the comparison of numbers and polynomials modulo, the reducibility of polynomials in the Galois field.

Keywords: codes, cyclic codes, noise-immune coding.

Циклические коды относятся к кодам, которые позволяют обнаруживать и исправлять ошибки, образовавшиеся при передаче сообщения по каналу связи.

Рассмотрим общий способ обнаружения и исправления ошибок. Будем считать, что по каналу связи требуется передать информационное сообщение $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m$, где $\alpha_i \in \{0,1\}$. К данному сообщению добавим k проверочных символов. Следовательно, код $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m$ по некоторому правилу преобразуется в код $\beta_1\beta_2 \dots \beta_m\beta_{m+1} \dots \beta_{m+k}$, который будет иметь $n = m + k$ символов. Данный код $\beta_1\beta_2 \dots \beta_n$ передается по каналу связи. Если помехи в канале связи отсутствовали, то на приёмной стороне код $\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 \dots \tilde{\beta}_n$ будет равен коду $\beta_1\beta_2 \dots \beta_n$. Если же при передаче сообщения в канале связи возникли шумы или наводки, искажившие сообщение, то в сообщении $\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 \dots \tilde{\beta}_n$ один или несколько символов будут отличаться от символов кода $\beta_1\beta_2 \dots \beta_n$. В зависимости от того насколько правильно подобраны проверочные символы кода $\beta_{m+1} \dots \beta_{m+k}$ и в зависимости от их количества k можно либо только обнаружить наличие ошибки или же исправить одну или несколько ошибок. Схему передачи сообщения по каналу связи можно видеть на рис.1.



Рис. 1. Схема передачи сообщения по каналу связи

Для обнаружения или коррекции ошибочно переданных символов вводятся понятия множества разрешенных и запрещенных к передаче комбинаций кода. Множество *разрешенных комбинаций кода* – это все кодовые комбинации, подающиеся на вход канала связи. Сообщения, которые не могут быть поданы на вход канала связи, называются *запрещенными*. Корректирующие свойства кода напрямую связаны со структурой множества запрещенных комбинаций и с тем насколько близки эти запрещенные комбинации к разрешенным.

Для формулировки теорем о корректирующих свойствах кодов введем понятие расстояния Хэмминга. *Расстояние Хэмминга* – это число позиций, в которых отличаются два кода. Например, расстояние Хэмминга между кодами 0101 и 1101 равно 1, т.к. они отличаются только в первой позиции.

Для того чтобы выяснить сколько ошибок может обнаружить или исправить код удобно использовать теоремы:

Теорема 1. Если минимальное Хэммингово расстояние d_{\min} для множества разрешенных комбинаций удовлетворяет неравенству $d_{\min} \geq L_o + 1$, то код может обнаружить L_o ошибок.

Теорема 2. Если минимальное Хэммингово расстояние d_{\min} для множества разрешенных комбинаций удовлетворяет неравенству $d_{\min} \geq 2 \cdot L_{и} + 1$, то код может исправить $L_{и}$ ошибок.

Так, например, если код имеет длину $n = 3$ и множество его разрешенных комбинаций $\{000, 111\}$, то минимальное Хэммингово расстояние $d_{\min} = 3$. По теореме 1 данный код может обнаружить одну или две ошибки $L_o \leq 2$ и исправить одну ошибку $L_{и} = 1$. Это легко понять, если множество запрещенных комбинаций $\{001, 010, 100, 011, 101, 110\}$ разбить на два подмножества и установить однозначное соответствие между элементами множества разрешенных комбинаций и подмножествами запрещенных комбинаций, так как представлено на рис.2

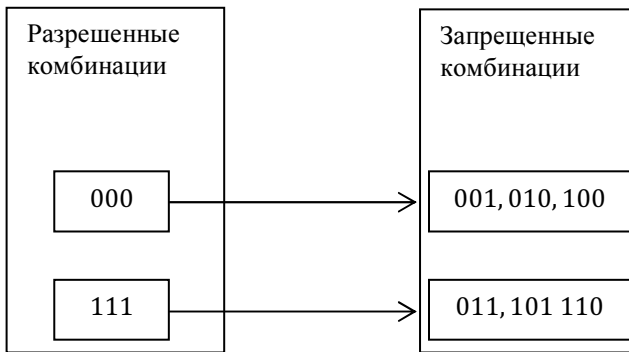


Рис. 2. Соответствие между разрешенными и запрещенными комбинациями кода при $n = 3$.

Из рис. 2 видно, что если в сообщении 000 произойдет одна ошибка, то на приемной стороне может быть принято одно из сообщений 001, 010, 100, по которым можно однозначно восстановить исходное сообщение 000. Если же в сообщении 111 будет искажен один символ при

передаче по каналу связи, то на приемной стороне будет получено одно из сообщений 011, 101, 110, по которым можно однозначно восстановить сообщение 111.

Введем понятие чисел сравнимых по модулю. Числа a и b называются *сравнимыми по модулю m* , если разность $a - b$ делится на m без остатка. Это записывается так $a = b \bmod m$. Заметим что число всегда сравнимо со своим остатком при делении на модуль. Так если $a = q \cdot m + r$, то $a = r \bmod m$. Другие свойства сравнений можно найти в [1,2].

Введем операции сложения, вычитания и умножения таким образом, что бы результатом этой операции являлось число из множества $\{0,1\}$ сравнимое по модулю 2 с результатом операции, т.е.

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0; & 0 + 1 &= 1; & 1 + 0 &= 1; & 1 + 1 &= 2 = 0 \bmod 2; \\ 0 - 0 &= 0; & 0 - 1 &= -1 = 1 \bmod 2; & 1 - 0 &= 1; & 1 - 1 &= 0; \\ 0 \cdot 0 &= 0; & 0 \cdot 1 &= 0; & 1 \cdot 0 &= 0; & 1 \cdot 1 &= 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Анализируя операции сложения и вычитания, видно, что они эквивалентны и их можно заменить операцией сложения по модулю два. Отметим что множество $\{0,1\}$ с заданным на нём операциями сложения и умножения, определенными согласно (1), образует конечное поле Галуа F_2 .

Информационному сообщению $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$, где $\alpha_i \in \{0,1\}$ поставим в соответствие многочлен [3]

$$G_{m-1}(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \dots + \alpha_m \cdot x^{m-1}. \quad (2)$$

При действиях с многочленами, таких как умножение, деление, сложение, вычитание будем использовать операции (1).

Порождающим многочленом $P_k(x)$ циклического кода называется многочлен, который делит $x^n + 1$ без остатка, т.е. $(x^n + 1) \div P_k(x)$.

Подбор порождающего многочлена связан с понятием приводимости или не приводимости многочлена над полем Галуа F_2 . Так многочлен называется *приводимым над полем F_2* , если его можно представить в виде произведения многочленов степени выше нулевой. Иначе же он называется *неприводимым*.

Для многочленов 2-й и 3-й степени справедлива теорема:

Теорема 3. Многочлен второй или третьей степени приводим тогда и только тогда, когда он имеет хотя бы один корень в данном поле.

Рассмотрим, например, приводимость многочленов второй степени:

$$P_2(x) = x^2 = x \cdot x \text{ приводим и имеет корень } P_2(0) = 0;$$

$$P_2(x) = x^2 + 1 = (x + 1) \cdot (x + 1) \text{ приводим и имеет корень } P_2(1) = 0;$$

$$P_2(x) = x^2 + x = x \cdot (x + 1) \text{ приводим и имеет корень } P_2(1) = 0;$$

$$P_2(x) = x^2 + x + 1 \text{ не приводим и корней не имеет: } P_2(0) = 1, P_2(1) = 1.$$

Используя теорему 3, несложно так же найти неприводимые многочлены третьей степени: $P_3(x) = x^3 + x + 1$; $P_3(x) = x^3 + x^2 + 1$.

Подберем порождающие многочлены для кода, содержащего $n = 7$. Для этого выражение $x^7 + 1$ разложим на неприводимые сомножители

$$x^7 + 1 = (x + 1) \cdot (x^3 + x^2 + 1) \cdot (x^3 + x + 1).$$

Следовательно, порождающие многочлены и количество информационных символов m можно выбрать:

$$P_1(x) = x + 1; k = 1; m = 7 - 1 = 6;$$

$$P_3(x) = x^3 + x + 1; k = 3; m = 7 - 3 = 4;$$

$$P_3(x) = x^3 + x^2 + 1; k = 3; m = 7 - 3 = 4;$$

$$P_4(x) = (x + 1) \cdot (x^3 + x^2 + 1) = x^4 + x^2 + x + 1; k = 4; m = 7 - 4 = 3;$$

$$P_4(x) = (x + 1) \cdot (x^3 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 + 1; k = 4; m = 7 - 4 = 3;$$

$$P_6(x) = (x^3 + x^2 + 1) \cdot (x^3 + x + 1) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Отметим, что многочлены $P_1(x)$ и $P_6(x)$ не интересны для практического использования, т.к. для них количество проверочных символов оказывается очень мало $k = 1$ или очень велико $k = 6$.

Для формирования циклического кода с информационным многочленом (2) и каким-либо порождающим многочленом $P_k(x)$ найдем остаток $R_l(x)$ и частное $q(x)$ от деления $G_{m-1}(x) \cdot x^k$ на порождающий многочлен $P_k(x)$, т.е.

$$G_{m-1}(x) \cdot x^k = q(x) \cdot P_k(x) + R_l(x), l < k.$$

Сформируем многочлен циклического кода, с учетом операций (1):

$$H_{n-1}(x) = G_{m-1}(x) \cdot x^k - R_l(x) = G_{m-1}(x) \cdot x^k + R_l(x) = q(x) \cdot P_k(x). (3)$$

Из выражения (3) видно, что многочлен циклического кода $H_{n-1}(x)$ делится на порождающий многочлен без остатка. Данный факт лежит в основе проверки отсутствия ошибок при передаче сообщения по каналу связи.

Рассмотрим пример построения циклического кода при $n = 7, k = 3; m = 7 - 3 = 4$; с образующим многочленом $P_3(x) = x^3 + x + 1$. Пусть, например, информационное сообщение имеет вид 0111, тогда согласно (2)

$$G(x) = x + x^2 + x^3, \quad x^3 \cdot G(x) = x^4 + x^5 + x^6.$$

Разделим $x^3 G(x)$ на образующий многочлен $P_3(x)$

$$\begin{array}{r} x^6 + x^5 + x^4 \\ \underline{x^6 + x^4 + x^3} \\ x^5 + x^3 \\ \underline{x^5 + x^3 + x^2} \\ x^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} / x^3 + x + 1 \\ x^3 + x^2 \end{array}$$

Согласно выражения (3) сложим остаток $R = x^2$ и $x^3 \cdot G(x)$. В результате получим многочлен циклического кода

$$H(x) = x^2 + x^4 + x^5 + x^6,$$

соответствующий коду 0010111.

Остальные циклические коды можно видеть в табл. 1.

Таблица 1. Разрешенные комбинации для циклических кодов при $n = 7, k = 3; m = 4$ для различных порождающих многочленов.

Информационное сообщение	Разрешенные комбинации циклического кода для порождающего многочлена $P_3(x) = x^3 + x + 1$	Разрешенные комбинации циклического кода для порождающего многочлена $P_3(x) = x^3 + x^2 + 1$
0000	000 0000	000 0000
0001	101 0001	011 0001
0010	111 0010	110 0010
0011	010 0011	101 0011
0100	011 0100	111 0100
0101	110 0101	100 0101
0110	100 0110	001 0110
0111	001 0111	011 0111
1000	110 1000	101 1000
1001	011 1001	110 1001
1010	001 1010	011 1010
1011	100 1011	000 1011
1100	101 1100	010 1100
1101	000 1101	001 1101
1110	010 1110	100 1110
1111	111 1111	111 1111

Разрешенные комбинации циклического кода для случая $n = 7, k = 4, m = 3$ можно видеть в табл. 2.

Таблица 2. Разрешенные комбинации для циклических кодов при $n = 7, k = 4; m = 3$ для различных порождающих многочленов.

Информационное сообщение	Разрешенные комбинации циклического кода для порождающего многочлена $P_4(x) = x^4 + x^2 + x + 1$	Разрешенные комбинации циклического кода для порождающего многочлена $P_4(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$
000	0000 000	0000 000
001	1101 001	0111 001
010	0111 010	1110 010
011	1010 011	1001 011
100	1110 100	1011 100
101	0011 101	1100 101
110	1001 110	0101 110
111	0100 111	0010 111

Дадим определение циклического сдвига вправо или влево. *Циклический сдвиг вправо* – это преобразование вида:

$$b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n \rightarrow b_n b_1 b_2 \dots b_{n-2} b_{n-1}.$$

Циклический сдвиг влево – это:

$$b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n \rightarrow b_2 b_3 \dots b_{n-1} b_n b_1.$$

Из табл. 1, 2 видно, что циклический сдвиг любой разрешенной комбинации циклического кода вправо или влево даёт другую разрешенную комбинацию циклического кода. Данное свойство и дало название этим кодам – *циклические коды*.

Исследуем способности циклических кодов из табл. 1,2 по обнаружению и исправлению ошибок. Для этого найдем минимальное Хэммингово расстояние для разрешенных комбинаций этих кодов. Например, для кода при $n = 7, k = 4; m = 3$ с образующим многочленом $P_4(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ расстояния Хэмминга будут:

$$\begin{aligned} d(0000000,1101001) &= 4; d(1101001,0111010) = 4; \\ d(0000000,0111010) &= 4; d(1101001,1010011) = 4; \\ d(0000000,1010011) &= 4; d(1101001,1110100) = 4; \\ d(0000000,1110100) &= 4; d(1101001,0011101) = 4; \\ d(0000000,0011101) &= 4; d(1101001,1001110) = 4; \\ d(0000000,1001110) &= 4; d(1101001,0100111) = 4; \\ d(0000000,0100111) &= 4; \\ d(0111010,1010011) &= 4; d(1010011,1110100) = 4; \\ d(0111010,1110100) &= 4; d(1010011,0011101) = 4; \\ d(0111010,0011101) &= 4; d(1010011,1001110) = 4; \\ d(0111010,1001110) &= 4; d(1010011,0100111) = 4; \\ d(0111010,0100111) &= 4; \\ d(1110100,0011101) &= 4; d(0011101,1001110) = 4; \\ d(1110100,1001110) &= 4; d(0011101,0100111) = 4; \\ d(1110100,0100111) &= 4; \\ d(1001110,0100111) &= 4. \end{aligned}$$

Следовательно, минимальное Хэммингово расстояние будет равно $d_{\min} = 4$. Используя теорему 1, найдем $L_o \leq d_{\min} - 1 = 3$, т.е. данный код может обнаружить 3 ошибки. Используя теорему 2, найдем $L_n \leq \frac{d_{\min}-1}{2} = \frac{3}{2}$, т.е. данный код может исправить одну ошибку.

Минимальное Хэммингово расстояние для циклических кодов из таблицы 1 $d_{\min} = 3$, следовательно, данные коды могут обнаружить $L_o \leq d_{\min} - 1 = 2$ ошибки и исправить $L_n \leq \frac{d_{\min}-1}{2} = 1$ ошибку.

Поскольку остаток $R = 1 \neq 0$, то при передаче по каналу связи была совершена ошибка.

Приведем пример исправления ошибки. Выберем из табл. 1 циклический код 1000110 для образующего многочлена $P_3(x) = x^3 + x + 1$. Предположим, что при передаче по каналу связи исказился один символ 1000111. Построим многочлен, согласно (4)

$$\tilde{H}(x) = 1 + x^4 + x^5 + x^6.$$

Разделим этот многочлен на $P_3(x)$.

$$\begin{array}{r} x^6 + x^5 + x^4 + 1 \quad | \quad x^3 + x + 1 \\ \underline{x^6 + x^4 + x^3} \\ x^5 + x^3 + 1 \\ \underline{x^5 + x^3 + x^2} \\ x^2 + 1 \end{array}$$

Примем согласно (5) синдром ошибки $S_0(x) = x^2 + 1$. Вес синдрома $\omega(S_0) = 2$. Вычисляем

$$S_1(x) = x \cdot S_0(x) \bmod P_k(x) = (x^3 + x) \bmod (x^3 + x + 1) = 1.$$

Вес синдрома $\omega(S_1) = 1$ равен количеству ошибок, которые может исправить код, следовательно, дальнейшие синдромы не вычисляем.

По выражению (6) найдем многочлен ошибок

$$\begin{aligned} E(x) &= x^{n-j} \cdot S_j(x) \bmod (1 + x^n) = x^{7-1} \cdot S_1(x) \bmod (1 + x^7) = \\ &= x^6 \cdot 1 \bmod (1 + x^7) = x^6. \end{aligned}$$

Согласно (7) исправим ошибку

$$\tilde{H}(x) + E(x) = 1 + x^4 + x^5 + x^6 + x^6 = 1 + x^4 + x^5.$$

Данному многочлену соответствует код 1000110.

Из вышеизложенного материала следует, что для изложения темы циклические коды слушатели должны хорошо владеть такими понятиями как сравнимость чисел и многочленов по модулю, приводимость многочленов в поле Галуа F_2 , расстояние Хэмминга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и теория чисел: Учебное пособие / под ред. Н.Я. Виленкина. М.: Просвещение, 1984. 192 с.
2. Жаров А.Н. Об изложении темы: алгоритм шифрования RSA // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2016. С.120-125.
3. Передача дискретных сообщений. Учебник для вузов / В.П. Шувалов, Н.В. Захарченко, В. О. Шварцман [и др.]; под ред. В.П. Шувалова. М.: Радио и связь, 1990. 464 с.

УДК 517.31

Н. И. Иванова, М. В. Куликова

Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны
Россия, г. Ярославль, e-mail: natalii803@mail.ru

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ОТ КУСОЧНО-ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматриваются методы вычисления неопределенных интегралов от непрерывных и разрывных кусочно-заданных функций.

Ключевые слова: интегральное исчисление, первообразная, неопределенный интеграл, ограниченная разрывная функция.

N. I. Ivanova, M. V. Kulikova

Yaroslavl Higher Military School of Air Defense
Russia, Yaroslavl, e-mail: natalii803@mail.ru

ON INTEGRALS OF PIECEWISE-DEFINED FUNCTIONS

We consider methods for calculating indefinite integrals of continuous and discontinuous piecewise-defined functions.

Keywords: integral calculus, primitive, indefinite integral, bounded discontinuous function.

Задачи интегрирования функций, заданных на разных промежутках различными формулами, возникают в технике и в теории вероятности; они часто предлагаются на олимпиадах различных уровней [1, 2]. У студентов возникают затруднения при решении даже простых с технической точки зрения задач. Некоторые приемы вычисления и оценок определенных интегралов от таких функций приведены в работе [3]. Мы рассмотрим задачи нахождения первообразных (неопределенных интегралов) от таких функций.

1. Определения и формулы

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке J , если $F'(x) = f(x)$, $x \in J$.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на промежутке J , то:

- 1) $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также первообразная для $f(x)$ на промежутке J ;
- 2) любая первообразная для $f(x)$ на промежутке J равна $F(x) + C$, где C – некоторая постоянная.

Таким образом, выражение любой первообразной для функции $f(x)$ на промежутке J имеет вид $F(x) + C$, где $F(x)$ – конкретная первообразная, а C – произвольная постоянная. Это выражение называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на промежутке J и обозначается $\int f(x)dx$, $x \in J$. Указание на промежуток J обычно явно не дается, а только подразумевается. Итак,

$$\int f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} F(x) + C. \quad (1)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке J , то она имеет на этом промежутке первообразную, задаваемую равенством

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ где } a \in J. \quad (2)$$

Если у функции $f(x)$ есть точки разрыва на J , то она может не иметь первообразной в смысле определения 1. В связи с этим удобно расширить понятие первообразной.

Определение 2 [4, с. 366]. Функция $F(x)$ называется (*обобщенной*) *первообразной* для функции $f(x)$, заданной на промежутке J , если $F(x)$ непрерывна на J и $F'(x) = f(x)$ во всех точках J за исключением, быть может, конечного их числа.

Если функция $f(x)$, определенная и ограниченная на промежутке J , имеет на нем конечное число точек разрыва, то она имеет на этом промежутке (*обобщенную*) первообразную, задаваемую равенством (2).

2. Примеры

Пример 1. Найти $\int \sin|x|dx$.

Решение 1. Так как $f(x) = \sin|x|$ – непрерывная на \mathbb{R} функция, то $\int \sin|x|dx$ существует всем \mathbb{R} и может быть найден по формулам (1) и (2):

$$\int \sin|x|dx = F(x) + C, \text{ где можно взять } F(x) = \int_0^x \sin|t|dt.$$

$$\text{Так как } \sin|t| = \begin{cases} \sin t, & \text{если } t \leq 0, \\ -\sin t, & \text{если } t \geq 0, \end{cases}$$

$$\text{то } F(x) = \int_0^x \sin t dt = -\cos t \Big|_0^x = -\cos x + 1 \text{ при } x \geq 0$$

и $F(x) = \int_0^x (-\sin t) dt = \cos t \Big|_0^x = \cos x - 1$ при $x \leq 0$.

Следовательно,

$$\int \sin |x| dx = \begin{cases} \cos x - 1 + C, & \text{если } x < 0; \\ -\cos x + 1 + C, & \text{если } x \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решение 2. На промежутке $(-\infty; 0]$ $\int \sin |x| dx = \int (-\sin x) dx = \cos x + C_1$, а на промежутке $[0; +\infty)$ $\int \sin |x| dx = \int \sin x dx = -\cos x + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Тогда для произвольной первообразной (неопределенного интеграла) $\int \sin |x| dx$ на всем $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ имеем

$$\int \sin |x| dx = \cos x + C_1 \text{ для } x \leq 0 \text{ и } \int \sin |x| dx = -\cos x + C_2 \text{ для } x \geq 0, \quad (4)$$

где C_1 и C_2 уже не произвольные постоянные. Действительно, в точке $x = 0$ оба равенства в (4) дают значения одной и той же первообразной, то есть $[\cos x + C_1]_{x=0} = [-\cos x + C_2]_{x=0}$ или $1 + C_1 = -1 + C_2$. Взяв $C_1 = C$ произвольным, получим $C_2 = 2 + C$ и

$$\int \sin |x| dx = \begin{cases} \cos x + C, & \text{если } x < 0; \\ -\cos x + C + 2, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Формула (3) из решения 1 более симметрична. Здесь она получится, если взять $C_1 = C - 1$; тогда $C_2 = C + 1$.

Замечание. Ясно, что решение 2 сложнее для понимания из-за двусмысленности обозначения неопределенного интеграла и того обстоятельства, что в нем не фигурирует интервал, на котором ищутся соответствующие первообразные.

Пример 2. Найти $\int f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \pi]; \\ 0, & x \notin [0; \pi]. \end{cases}$

Решение 1. Так как синус и нулевая функция непрерывны, а $\sin 0 = \sin \pi = 0$, то $f(x)$ непрерывна во всех точках \mathbb{R} . Поэтому $\int f(x) dx$ существует на всем \mathbb{R} и $\int f(x) dx = F(x) + C$, где можно взять

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

При $x \leq 0$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x 0 dt = 0$,

при $0 < x \leq \pi$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x$,

при $x > \pi$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^{\pi} f(t) dt + \int_{\pi}^x f(t) dt = \int_0^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^x 0 dt = 2$.

Следовательно, $\int f(x) dx = \begin{cases} C, & x \in (-\infty; 0], \\ 1 - \cos x + C, & x \in (0; \pi), \\ 2 + C, & x \in [\pi; +\infty). \end{cases}$

Решение 2. Имеем $\int f(x) dx = \begin{cases} C_1, & x \in (-\infty; 0), \\ -\cos x + C_2, & x \in [0; \pi], \\ C_3, & x \in (\pi; +\infty) \end{cases}$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные, связанные соотношениями

$$\begin{cases} C_1 = -\cos 0 + C_2, \\ -\cos \pi + C_2 = C_3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1 + C_2, \\ 1 + C_2 = C_3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = C_1 + 1, \\ C_3 = C_1 + 2. \end{cases}$$

Взяв $C_1 = C$ произвольным, получим снова

$$\int f(x) dx = \begin{cases} C, & x \in (-\infty; 0), \\ 1 - \cos x + C, & x \in [0; \pi], \\ C + 2, & x \in (\pi; +\infty). \end{cases}$$

Пример 3. Найти $\int \operatorname{sgn} x dx$.

Решение 1. Функция $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty; 0), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0; +\infty) \end{cases}$ ограничена и имеет

разрыв в точке $x = 0$. Поэтому для любого $x \in \mathbb{R}$ $\int \operatorname{sgn} x dx = F(x) + C$,

где $F(x) = \int_0^x \operatorname{sgn} t dt = \int_0^x (-1) dt = -x$, если $x \in (-\infty; 0)$, $F(0) = \int_0^0 \operatorname{sgn} t dt = 0$ и

$F(x) = \int_0^x \operatorname{sgn} t dt = \int_0^x 1 dt = x$, если $x \in (0; +\infty)$. Таким образом, $F(x) = |x|$, а

$$\int \operatorname{sgn} x dx = |x| + C.$$

Решение 2. $\int \operatorname{sgn} x dx = \int (-1)dx = -x + C_1$ для $x \in (-\infty; 0)$ и $\int \operatorname{sgn} x dx = \int 1dx = x + C_2$ для $x \in (0; \infty)$. Поскольку первообразные, входящие в интеграл $\int \operatorname{sgn} x dx$, $x \in (-\infty; +\infty)$, – непрерывные функции, то $\lim_{x \rightarrow 0} (-x + C_1) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + C_2)$, то есть $C_1 = C_2 = C$. Следовательно,

$$\int \operatorname{sgn} x dx = \begin{cases} -x + C, & x \in (-\infty; 0), \\ x + C, & x \in [0; +\infty), \end{cases}$$

то есть $\int \operatorname{sgn} x dx = |x| + C$.

Замечание. Поскольку определение 2 первообразной от ограниченной разрывной функции в курсах математики для студентов технических и экономических специальностей вузов дают редко, то на олимпиадах для таких функций желательно формулировать условия задач, не используя понятия первообразной и неопределенного интеграла.

Пример 4. Найти все непрерывные функции $F(x)$, $x \in [0; \infty)$, для которых $F'(x) = [x]$ в точках $x \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$. Здесь $[x]$ – целая часть числа x .

Решение. На интервале $(k-1; k)$, где $k \in \mathbb{N}$, $[x] = k-1$. Для функции $F(x)$ на этом интервале $F'(x) = [x] = k-1$, и потому $\forall x \in (k-1; k)$ $F(x) = \int (k-1) dx = (k-1)x + C_k$, где C_k – некоторая постоянная. Так как $F(x)$ непрерывна в точках $k \in \mathbb{N}$ то $F(k-0) = (k-1)k + C_k$ и $F(k+0) = k^2 + C_{k+1}$ должны совпадать, то есть $C_{k+1} = C_k + (k-1)k - k^2 = C_k - k$. Взяв $C_1 = C$ – произвольным, получим $C_n = C_1 - (1+2+\dots+(n-1)) = C - \frac{n(n-1)}{2}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, функция $F(x) = (n-1)x + C - \frac{n(n-1)}{2}$ для $x \in [n-1; n)$, $n \in \mathbb{N}$ непрерывна во всех точках $x \in [0; \infty)$ и $F'(x) = [x]$ при $x \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$. Так как для $x \in [n-1, n)$ $[x] = n-1$, то $n = [x] + 1$ и потому

$$F(x) = [x]x - \frac{([x]+1)[x]}{2} + C, \quad x \in [0; \infty).$$

3. Задачи

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int (|1+x| - |1-x|) dx$, б) $\int e^{-|x|} dx$, в) $\int \min(1, x^2) dx$,

г) $\int |\sin x| dx$, д) $\int x[x] dx$ ($x \geq 0$), е) $\int \operatorname{sgn}(x - x^3) dx$.

2. Найти все непрерывные функции $F(x)$, $x \in [0, +\infty)$, для которых $F'(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ в точках непрерывности функции $\operatorname{sgn}(\sin x)$.
3. Доказать, что существует единственная непрерывная функция $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, для которой $F'(x) = \ln(x^2)$ при $x \neq 0$ и $F(0) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беркович Ф.Д. Задачи студенческих олимпиад по математике с указаниями и решениями / Ф.Д. Беркович, В.С. Феди. Новочеркасск: Изд-во ЮРГТУ, 2006. 184 с.
2. Ройтенберг В.Ш. Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова, Л.А. Сидорова. 2-е изд., испр. и доп. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2015. 151 с.
3. Иванова Н.И. Вариации на тему определенного интеграла / Н.И. Иванова, В.В. Третьякова // Сб. ст. победителей II науч.-практ. конкурса «Научные достижения и открытия 2017». Пенза: Наука и просвещение, 2017. С. 137-142.
4. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1981. 544 с.

УДК 51:37.02

В. В. Крючкова

Рязанский государственный университет им. С.А.Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: kryuchkova.val@gmail.com

УПРАВЛЕНИЕ СРЕДСТВАМИ МАТЕМАТИКИ ПРИЕМАМИ ТВОРЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ

Рассмотрены возможности изменения характера образовательной и учебно-познавательной деятельности студентов с помощью цикла взаимосвязанных задач. Осуществляется характеристика приемов творческого мышления при изучении математики через типологию и примеры целесообразно подобранных задач

Ключевые слова: приемы творческого мышления, типология, метод целесообразно подобранных задач.

V. V. Kryuchkova

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: kryuchkova.val@gmail.com

MANAGEMENT OF RECEPTIONS OF CREATIVE THINKING OF STUDENTS BY MATHEMATICAL MEANS

We consider the possibilities of changing the nature of educational and cognitive activity of students with the help of a cycle of interrelated tasks. Receptions of creative thinking of trainees are described by typology and samples of cycles of mathematical tasks.

Keywords: *receptions of creative thinking, typology, method of interrelated tasks.*

Благодаря изучению математики студент не только приобретает математический инструментарий, но и овладевает интеллектуальной культурой, в которую входят, в том числе, умения пользоваться аналогиями, отличать обоснованное от недоказанного; искусство выдвигать гипотезы; навыки построения правильно расчлененного логического анализа ситуаций, владение методами доказательств или опровержений.

К сожалению, большинство студентов, как правило, готовы только к воспроизведению полученных знаний, даже если они изучают математику в достаточно большом объеме. Например, вопросы, требующие небольших, но творческих усилий: «Верно ли, что ...?»; «Сравните результаты, полученные в заданиях *A*, *B*, ... Какую гипотезу Вы можете сформулировать на основании проведенного анализа?»; «Какие следствия Вы можете вывести из полученного утверждения?», вызывают у обучаемых затруднения и часто знакомый ответ: «У нас этого нет в лекциях». Такое положение нельзя объяснить только возможным несовершенством учебных планов и программ. Необходимо изменить характер учебно-познавательной деятельности студента. Безусловно, до сих пор актуальны задачи формирования творческой активности студента и совершенствования когнитивных приемов его мышления [1].

Решение указанной проблемы в научно-педагогической деятельности высшей школы следует искать в изменении индивидуально-личностного смысла обучения. Оно будет успешным лишь тогда, когда студент как активный субъект учения не только принимает готовую учебную задачу и осуществляет целенаправленный поиск ее решения, но и предлагает свою задачу. Обучение должно происходить в атмосфере самостоятельной постановки вопросов, позволяющих установить общий метод решения целого класса задач, оригинальных формулировок новых задач, утверждений и алгоритмов. Задачи могут быть разного уровня сложности. Необходимо постепенно вводить студентов в соответствующую творческую деятельность – от аналогичной работы по образцу до использования усвоенной информации в новой, незнакомой или более общей ситуации. В наших работах [3] и [4] мы исследовали проблемы проектирования педагогических технологий обобщения в первую очередь в математической и методической подготовке будущего учителя математики.

Цель данной статьи заключается в раскрытии приемов творческого мышления студентов и возможностей их формирования через систему целесообразно подобранных и взаимосвязанных математических задач. Данный метод уже давно и хорошо себя зарекомендовал в дидактике школьной математики. В процессе преподавания вузовской математики, помимо решения со студентами задач, носящих традиционный характер предписания: «Докажите, что ...», «Вычислите ...», мы предлагаем цепочки заданий учебно-исследовательского характера, полная версия которых присутствует в нашем сборнике [2]. Они не должны требовать привлечения знаний, выходящих за рамки стандартного программного материала, хотя итогом выполнения некоторых из них является знакомство с новым понятием или открытие важного математического факта. Эти задания формируют у студентов приемы творческого мышления и учат их:

- наблюдать, подмечать общие закономерности, формулировать возможные гипотезы, проверять их справедливость;
- выводить следствия из полученных утверждений;
- анализировать полученные рассуждения; находить в них существенное, значимое, формулировать и обосновывать более общие утверждения;
- формулировать обратное и противоположное утверждения, исследовать взаимосвязь получаемых утверждений;
- использовать различные языковые средства для перевода задачи и полученных в ней результатов на другой язык;
- исследовать взаимосвязь различных понятий, проводить их классификацию;
- оценивать красивые утверждения, конструировать с помощью полученных утверждений новые задачи в области элементарной математики (возможно, олимпиадного характера).

Каждое задание состоит из 10–15 взаимосвязанных задач. Первая задача, как правило, является несложной и формулируется в стандартной форме. В серии следующих задач происходит развитие темы данной задачи в соответствии с указанными выше ориентирами, а также будущей профессиональной направленностью обучения.

Значительная часть предлагаемых нами задач связана с анализом доказательства того или иного утверждения. Внимание студентов постоянно обращается на то обстоятельство, что тщательное исследование доказательства какого-либо утверждения позволяет, как правило, получить значительно более общее утверждение, а для этого нужно уметь выделять узловые моменты рассуждения, главное и существенное, что в нем использовалось. Полезно предложить найти новое доказательство полученного ранее утверждения. Его анализ позволяет студентам по-иному взглянуть на изучаемый круг явлений, включить объект в новые связи.

Мы считаем, что исключительно важным для студента является умение формулировать полученные математические результаты на разных языках (естественном, формульном, графическом). Поэтому, практически в каждом задании, встречаются упражнения, требующие переформулировки того или иного утверждения, «перевода» его на указанные языки.

Одним из показателей успешного изучения математики является умение грамотно задавать вопросы. Студент обязан заметить, что вместе с каждым полученным утверждением возникает череда новых естественных вопросов. Мы видим в этом первый шаг в формировании средствами математики важного качества: изучающий математику должен уметь не только хорошо решать задачи, но и составлять новые. Безусловно, составление оригинальных задач является исключительно творческим процессом. Научить этому чрезвычайно трудно. Поэтому предлагаемые задания постепенно вводят студентов в соответствующую деятельность. Сначала предлагается составлять новые задачи, пользуясь неким образцом, демонстрируя возможные вопросы – направления развития темы задачи. Затем, отказываясь от однозначности и определенно прямолинейного характера действий, предлагаем задания, допускающие различные варианты правильных ответов, предполагающие поиск примеров и контрпримеров, тем самым, усиливая творческое начало математической деятельности. Другими словами, одной из особенностей наших заданий является их направленность на формирование дивергентных способностей студентов.

Каждое задание, по возможности, начинается беседой, мотивирующей предстоящую деятельность студентов, нацеливающей его на итог, который должен быть получен в процессе его выполнения.

Продемонстрируем некоторые из этих общих положений на примере задания, которое связано с вычислением больших степеней матриц. Параллельно будем сопровождать его методическими комментариями, раскрывающими характер работы с ним в разных аудиториях. Мотивирующей иллюстрацией является, например, следующая: в экономике хорошо известна так называемая модель расширяющейся экономики фон Неймана. Если \vec{u}_k – вектор, компонентами которого являются товары, произведенные в k -м году, то $\vec{u}_{k+1} = A\vec{u}_k$, значит $\vec{u}_n = A^n \vec{u}_0$. Поэтому, чтобы прогнозировать экономику необходимо вычислять и знать свойства степеней матрицы A .

Предлагаемая цепочка задач, образующих это задание, может выглядеть следующим образом.

1. Выполняя вычисления в линейной алгебре, часто приходится вычислять большие степени матрицы. Это несложно сделать, если матрица имеет диагональный вид. Сформулируйте и обоснуйте соответствующий результат.

Если у студентов возникают затруднения, то им предлагается следующая задача.

2. Докажите, что, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}$, n — произвольное

натуральное число, то $A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ss}^n \end{pmatrix}$.

Затем со студентами обсуждается, как можно вычислять степени произвольных матриц, при этом элементы воспроизведения информации сопровождаются несложными поисками возможных алгоритмов.

3. Пусть теперь A – некоторая квадратная матрица. Вспомните условия, при которых ее можно привести к диагональному виду.

4. Пусть A – квадратная матрица, приводящаяся к диагональной, то есть существует матрица T такая, что $T^{-1}AT$ является диагональной. В этом случае степени матрицы A легко вычислять. Как это сделать?

Дальнейшие задачи в этой серии могут зависеть от основной специальности, которой овладевают студенты. Если это будущие учителя математики, то полезной может оказаться следующая серия вопросов-задач.

5. Выполнив это задание, Вы научитесь находить формулу общего члена некоторых последовательностей, заданных рекуррентно. Рассмотрим последовательность Фибоначчи (F_n) . $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и для любого

$k \geq 0$: $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$. Рассмотрим векторы столбцы $\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}$. Найдите та-

кую матрицу A , что $\begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}$.

6. В предыдущем задании доказано, что $\begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}$.

Выразите вектор $\begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix}$ через вектор $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$, вычислите, пользуясь резуль-

татами последнего задания, k -ю степень матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и найдите формулу общего члена последовательности Фибоначчи.

7. Выведите следствия из результата, полученного в предыдущем задании.

8. Докажите, что F_k является ближайшим к $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k$ целым числом.

9. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{k+1}}{F_k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Последнее число называется «золотым сечением».

10. Постарайтесь самостоятельно придумать несколько задач, которые связаны с нахождением общего члена последовательности, заданной рекуррентно.

Главным средством, которое использовалось для получения этих результатов, был анализ построенного ранее рассуждения. Неоднократно звучавшее задание: найдите другое доказательство полученного утверждения, как правило, позволяло взглянуть на изучаемую ситуацию с неожиданной стороны, найти новые содержательные обобщения. Здесь важно, разбивая сложную учебную ситуацию на простые шаги, умело, расставляя акценты, соблюсти посильность и активность обучения.

На занятиях со студентами-социологами соответствующая цепочка заданий может выглядеть следующим образом.

5а. Каждый год $\frac{1}{10}$ жителей страны R , живших вне региона T , въезжает в T , а $\frac{1}{5}$ жителей T покидают этот регион. Пусть \vec{u}_0 — вектор $\begin{pmatrix} n_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$, где n_0 — первоначальное количество жителей страны, проживающих вне региона T , а t_0 — первоначальное количество жителей региона T , а \vec{u}_k — вектор $\begin{pmatrix} n_k \\ t_k \end{pmatrix}$, где соответственно n_k — количество жителей страны, проживающих вне региона T через k лет, а t_k — количество жителей региона T через k лет. Найдите матрицу A , такую, что $\vec{u}_{k+1} = A\vec{u}_k$, а затем выразите вектор \vec{u}_k через A и \vec{u}_0 .

6а. Вычисляя степень матрицы A с помощью известной Вам процедуры, постарайтесь найти формулы, связывающие n_k и t_k с n_0 и t_0 .

7а. Докажите, что
$$\begin{pmatrix} n_k \\ t_k \end{pmatrix} = (n_0 + t_0) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + (n_0 - 2t_0)(0,7)^k \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

8а. Выведите следствия из предыдущих результатов.

9а. Докажите, что «достаточно быстро» количество жителей страны, живущих вне региона, становится близким к $2/3$ населения этой страны, а в регионе будет проживать приблизительно $1/3$ населения страны.

10а. Какие еще выводы о динамике населения Вы можете сделать, анализируя полученные результаты.

11а. Исследуйте, как будет изменяться динамика населения страны при других исходных данных.

Для студентов-биологов соответствующую цепочку заданий можно развернуть вокруг задачи: эпидемия в некоторой популяции такова, что в течение каждого месяца половина здоровых особей заболевает, а четверть заболевших умирает. Исследовать динамику этой популяции.

Несомненно, описание одного цикла, ситуационно полного в методическом отношении, представляет собой сложную проблему. Решение ее часто проводится на чисто интуитивном уровне и существенно зависит от опыта педагога, от уровня его математического образования и методической подготовки, от его задачной эрудиции и его интеллектуальной инициативы. Важна не только систематизация разнообразных приемов варьирования задач, но и актуален оптимизационный характер методической проблемы.

Систематическое использование описанных учебно-исследовательских заданий заметно повышает качество образования, о чем свидетельствует ежегодная диагностика успешности усвоения курса. Другим положительным результатом нашей методики является заметный интерес студентов, будущих учителей математики, к методическим вопросам курса, повышение их творческой активности в процессе решения математических задач, профессионально значимой инициативы в постановке методических вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев В.В. Формирование творческой активности студентов в процессе решения математических задач. Ярославль: Изд-во ЯГПУ. 1996. 150 с.
2. Крючков Н.И. Сборник заданий по алгебре / Н.И. Крючков, В.В. Крючкова. М.: Академия, 2007. 192 с.
3. Крючкова В.В. Проблемы проектирования педагогических технологий обобщения // Известия РАО. 2006. № 3. С. 81-89.
4. Крючкова В.В. Формирование приемов творческого мышления будущих учителей математики // Наука школе. 2006. № 6. С. 39-42.

УДК 51

В. О. Кузнецов

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова,
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: kvo_kuz@mail.ru

О НЕСУЩЕСТВУЮЩИХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ

Рассматриваются две задачи из курса теории вероятностей, иллюстрирующие свойства случайных величин с симметричной плотностью распределения.

Ключевые слова: плотность распределения, нормальное распределение, математическое ожидание, вероятность.

V. O. Kuznetsov

*Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint Petersburg, e-mail: kvo_kuz@mail.ru*

ON NONEXISTING PROBABILITY DISTRIBUTIONS

Two problems, from the course of the probability theory, illustrating the properties of random variables with symmetric density, are considered.

Keywords: density function, normal distribution, expected value, probability.

Математический объект существует, если его определение не включает противоречия ни в самом себе, ни с предложениями, допущенными раньше.

Анри Пуанкаре

1. На практическом занятии по теории вероятностей разбираем с группой студентов свойства нормального распределения. Две последние разбираемые на занятии задачи взяты из популярного задачника Гмурмана [1] и призваны проиллюстрировать симметрию графика плотности

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

этого распределения относительно прямой $x = a$.

337. [1]. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$. Вероятность попадания X в интервал $(10, 20)$ равна $0,3$. Чему равна вероятность попадания X в интервал $(0, 10)$?

338. [1]. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания X в интервал $(10, 15)$ равна $0,2$. Чему равна вероятность попадания X в интервал $(35, 40)$?

Разобрав решение задачи 337, по таблице значений интегральной функции Лапласа $\Phi(x)$ в конце задачника находим *дополнительно* параметр σ в этой задаче:

$$P\{X \in (10, 20)\} = \Phi\left(\frac{20-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0,3 \Rightarrow$$

$$\frac{10}{\sigma} = \Phi^{-1}(0,3) \approx 0,84 \Rightarrow \sigma = \frac{10}{0,84} = 11,90.$$

Задачу 338 студенты решают самостоятельно и довольно быстро дают ответ: 0,2. Поскольку до конца занятия остается несколько минут, то, чтобы не начинать новую тему, предлагаю студентам найти или подобрать по таблице значение параметра σ в этой задаче. Однако уравнение

$$P\{X \in (35, 40)\} = \Phi\left(\frac{40-25}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{35-25}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0,2$$

так просто уже не решается, а подобрать к концу занятия искомое значение параметра σ студентам не удастся. Поэтому нахождение параметра σ в этой задаче выдается группе в качестве домашнего задания.

Вопрос о нахождении параметра σ в этой задаче возник спонтанно. Формулировка задачи нахождения этого параметра не предусматривала, и ответа на поставленный вопрос в задачнике нет. Поэтому при подготовке к следующему занятию прикидываю, как же найти в этой задаче параметр σ . Замена $x = 5/\sigma$ приводит к уравнению $\Phi(3x) - \Phi(2x) = 0,2$. Полагая $F(x) = \Phi(3x) - \Phi(2x)$ и решая уравнение

$$F'(x) = (3e^{-9x^2/2} - 2e^{-2x^2})/\sqrt{2\pi} = 0,$$

находим (единственную) точку экстремума функции $F(x)$ на промежутке

$[0, \infty)$: $x_0 = \sqrt{\frac{2}{5} \ln \frac{3}{2}} = 0,40272\dots$ Поскольку x_0 – точка максимума, то

$$\Phi(3x) - \Phi(2x) \leq \Phi(3x_0) - \Phi(2x_0) = p_0 = 0,09679\dots$$

Таким образом, нормально распределенной величины с указанными в задаче характеристиками не существует! Задана слишком большая вероятность попадания случайной величины в указанный интервал (или неудачно выбран интервал). Чтобы сделать задачу корректной, нужно либо уменьшить вероятность, либо изменить рассматриваемые интервалы.

С уменьшением вероятности все понятно: достаточно взять любую вероятность меньше p_0 , например, 0,05. Чтобы, не меняя вероятность, подобрать интервалы, не приводящие к противоречию, Достаточно выбрать

параметр λ так, чтобы $\max\{\Phi(\lambda x) - \Phi(x)\} > 0,2$. Аналогичные выкладки показывают, например, что

$$\max\{\Phi(3x) - \Phi(x)\} = \Phi(3x_1) - \Phi(x_1) = p_1 = 0,24216\dots,$$

где $x_1 = 0,52407\dots$. Поскольку $p_1 > 0,2$, то уравнение $\Phi(3x) - \Phi(x) = 0,2$ имеет два корня x_2 и x_3 , где $x_2 < x_1 < x_3$. Численное решение уравнения $\Phi(3x) - \Phi(x) = 0,2$ дает $x_2 = 0,30478\dots$ и $x_3 = 0,81629\dots$, что приводит к следующим значениям для параметра σ : $32,80995\dots$ и $12,25042\dots$. При $a = 25$ величине $\lambda = 3$ соответствуют интервалы $(30, 40)$ и $(10, 20)$.

Отметим, что методически задача 338 в [1] построена безупречно, назначение ее понятно, а вероятность в две десятых, на первый взгляд, совсем не кажется большой в описанной ситуации. Противоречие в численных данных условия задачи настолько незаметно, что эта же задача с теми же численными данными присутствует в задачаниках [2, с. 222] и [3, с. 60]. Только случайное стечение обстоятельств, сложившееся при проведении практического занятия, позволило автору этой статьи заметить указанное противоречие.

2. Для иллюстрации теоретико-вероятностного смысла математического ожидания очень удобен пример случайной величины, плотность распределения которой $p(x)$ является четной функцией. Поскольку

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx, \tag{1}$$

то, в силу нечетности подинтегральной функции, математическое ожидание такой случайной величины равно нулю. Это хорошо согласуется с интуитивным представлением о *среднем значении случайной величины*. Нужно, однако, не забывать, что

- функция $p(x)$ действительно должна являться плотностью распределения;

- получающиеся при этом интегралы должны абсолютно сходиться. Следующий пример и его решение взяты из [2].

Пример 12. [2, с. 125]. *Найти математическое ожидание случайной величины X , плотность распределения которой задана функцией*

$$p(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Решение.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \ln(1+x^2) \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{\pi} \ln(1+x^2) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \left(0 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+x^2) \right) + \frac{1}{\pi} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2) - 0 \right) = 0,$$

поскольку

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2).$$

Так как $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(1+x^2) = \infty$, то при вычислении математического ожидания здесь допущена ошибка: несобственный интеграл расходится. Немного изменив выкладки, можно показать лишь, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{1+x^2} = 0$$

в смысле главного значения несобственного интеграла. Поскольку в определении математического ожидания требуется, чтобы интеграл (1) сходился абсолютно, то в этой ситуации следовало бы сказать, что математическое ожидание указанной случайной величины не существует.

И так и следовало бы сделать, если бы такая случайная величина существовала! Ведь, сосредоточившись на бросающейся в глаза ошибке при вычислении несобственного интеграла, читатель может и не заметить, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 dx}{\pi(1+x^2)} = 2,$$

и, следовательно, случайной величины с указанной плотностью распределения не существует! Заметим также, что *распределение Коши*

$$p_0(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

часто упоминается в учебниках по теории вероятностей (см, например, [4]) именно как пример распределения, у которого математическое ожидание и дисперсия не существуют.

Исправить этот неудачный пример можно, заменив плотность распределения на одну из функций

$$p_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi(1+x^4)}, \quad p_2(x) = \frac{3}{2\pi(1+x^6)},$$

или обрезать область возможных изменений случайной величины, положив

$$p_3(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+x^2)}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Последний вариант, видимо, является предпочтительным, поскольку обоснование нормирующих множителей у функций $p_1(x)$, $p_2(x)$ и вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} x p_2(x) dx$ требует громоздких выкладок. Возможно, именно математическое ожидание распределения с плотностью $p_3(x)$ и планировали первоначально вычислить авторы [2]².

Автор благодарен зав. кафедрой математики ГУМРФ, профессору М. В. Сухотерину, обратившему внимание автора на рассмотренный в пункте 2 пример, а также зав. кафедрой теории вероятностей МАИ, профессору А. И. Кибзуну за обсуждения и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. 9-е изд., стер. М.: Высш. шк., 2004, 404 с.
2. *Гусак А.А.* Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач. / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова. 4-е изд., стер. Минск: ТетраСистемс, 2003, 288 с.
3. *Маценко П. К.* Руководство к решению задач по теории вероятностей. Учебное пособие / П. К. Маценко, В. В. Селиванов. Ульяновск: УЛГТУ, 2000, 99 с.
4. *Кибзун А. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами: Учебное пособие / А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, А. Н. Сиротин. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002, 224 с.

УДК 51-74

**А. Е. Лебедев^{1,2}, Д. Б. Шмулевский², А. А. Павлов^{1,2},
В. В. Гуменный², В. В. Капралов²**

¹Ярославский государственный технический университет

²Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны
Россия, г. Ярославль, *email: lae4444@mail.ru*

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА 2-ГО РОДА К РАСЧЕТУ ПРОЦЕССА РАЗГОНА АВТОМОБИЛЯ

В работе приводится методика использования уравнения Лагранжа 2-го рода для описания разгона транспортного средства на прямолинейном участке пути.

Ключевые слова: движение, разгон, ускорение, вращающиеся массы, момент инерции, передаточное отношение.

² Об этом говорит множитель 2 в числителе функции $p(x)$.

A. E. Lebedev^{1,2}, D. B. Shmulevskiy², A. A. Pavlov^{1,2},
V. V. Gumennyi², V. V. Kapralov²

¹Yaroslavl State Technical University

²Yaroslavl Higher Military School of Air Defence
Russia, Yaroslavl, email: lae4444@mail.ru

THE APPLICATION OF LAGRANGE'S EQUATIONS OF THE 2ND KIND OF CALCULATION OF PROCESS ACCELERATION

The paper presents the method of using Lagrange's equations of the 2nd kind to describe the acceleration of the vehicle, the straight section of the path.

Keywords: movement, acceleration, acceleration, rotating mass, moment of inertia, gear ratio.

Автомобиль представляет собой сложную механическую систему, состоящую из достаточно большого числа подвижных элементов, совершающих различные виды движений: поступательное, вращательное, плоскопараллельное и др.

В процессе разгона автомобиля энергия, вырабатываемая в двигателе, расходуется на увеличение модуля скорости центра масс автомобиля, а также на раскрутку вращающихся деталей, причем последнее особенно сказывается на низших передачах, где передаточное отношение трансмиссии выше.

Для описания динамики разгона в теории автомобиля [1] практически всегда применяется дифференциальное уравнение движения. При этом считается, что автомобиль является материальной точкой, масса которой зависит от включенной передачи, то есть передаточного отношения трансмиссии.

Однако для решения данного уравнения используются графические или графоаналитические методы, что не всегда удобно, особенно для сравнения динамичности автомобилей с различными параметрами.

Авторами работы предложено для описания динамики разгона применять уравнение Лагранжа 2-го рода [2], при этом в качестве обобщенной координаты выбрано угловое перемещение коленчатого вала двигателя ϕ , а за обобщенную скорость принято его угловая скорость ω .

Тогда уравнение Лагранжа 2-го рода примет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = Q. \quad (1)$$

Здесь Q - обобщенная сила.

Для определения ускорения автомобиля при помощи данного уравнения необходимо вычислить его кинетическую энергию T .

Полагаем, что кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательно движущихся масс T_1 и кинетической энергии вращающихся элементов T_2 .

При вычислении кинетической энергии вращающихся элементов T_2 выделим две характерные группы деталей. К первой будем относить маховик, диски сцепления и первичный вал коробки перемены передач, ко второй группе – колеса и вращающиеся элементы ведущего моста. Кинетической энергией других вращающихся деталей пренебрегаем.

Тогда кинетическая энергия автомобиля, как механической системы определяется по формуле

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_m\omega^2}{2} + \frac{J_m\omega_k^2}{2}. \quad (2)$$

Кинематические зависимости между скоростью автомобиля v и угловыми скоростями колес ω_k (элементов второй группы) и маховика ω_e (первой группы) имеют вид

$$v = \omega_k r, \quad \omega_k = \frac{\omega}{u_0 u_i}, \quad (3)$$

где u_0 - передаточное число главной передачи; u_i - передаточное число КПП на i -й передаче; ω_e - угловая скорость коленчатого вала (маховика); r – радиус качения колеса; v – скорость автомобиля.

С учетом вышеописанных зависимостей выражение для T примет вид

$$T = \frac{\omega^2}{2} \left(J_m + \frac{J_k}{u_0^2 u_k^2} + \frac{mr^2}{u_0^2 u_k^2} \right) = \frac{\omega^2}{2} \delta. \quad (4)$$

Здесь

$$\delta = J_m + \frac{J_k}{u_0^2 u_k^2} + \frac{mr^2}{u_0^2 u_k^2}. \quad (5)$$

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = \omega \delta, \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega} \right) = \epsilon \delta, \quad (6)$$

где ϵ - угловое ускорение коленчатого вала.

Определим обобщенную силу Q . Для этого сообщим системе виртуальное перемещение, при котором обобщенная координата ϕ приобретет положительное приращение $\delta\phi$. Вычислим сумму элементарных работ всех активных сил на этом виртуальном перемещении системы:

$$\delta A = M_e \delta\phi. \quad (7)$$

Пренебрегая силами сопротивления воздуха и качения к активным силам, отнесем только эффективный момент двигателя M_e .

Обобщенную силу определим из выражения

$$Q = \frac{\delta A}{\delta \phi} = M_e. \quad (8)$$

С учетом (6) уравнение (1) примет вид

$$\epsilon \delta = M_e. \quad (9)$$

Тогда при $a = \epsilon r(u_0 u_i)^{-1}$ выражение для ускорения записывается следующим образом:

$$a = M_e (u_0 u_i \delta)^{-1}. \quad (10)$$

Из данной зависимости с учетом (5) следует, что с ростом передаточного отношения трансмиссии $u_{tr} = u_0 u_i$ ускорение автомобиля сначала возрастает до некоторого значения, а затем начинает убывать. Снижение ускорения с ростом передаточного отношения трансмиссии можно объяснить увеличением моментов сил инерции вращающихся масс элементов первой группы. По этой причине для эффективного разгона автомобиля движение следует начинать с той передачи, на которой достигаются максимальные значения ускорения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литвинов А.С. Автомобиль: Теория эксплуатационных свойств. М.: Машиностроение, 1989. 240 с.
2. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. М.: Наука, 1971.

УДК 517.926

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

ЗАМЕЧАНИЕ О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

В работе обсуждаются способы доказательства совпадения характеристических уравнений, составленных для линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и для соответствующей нормальной линейной системы.

Ключевые слова: курс математики для вузов, линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение.

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

ONE REMARK ABOUT THE CHARACTERISTIC EQUATION

In this paper, we discuss methods for proving the coincidence of the characteristic equations for a linear homogeneous differential equation with constant coefficients and for the corresponding normal linear system.

Keywords: course of mathematics for technical universities, linear homogeneous differential equation with constant coefficients, characteristic equation.

Исследование устойчивости решений линейного дифференциального уравнения

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0, \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами a_i ($i = 1, \dots, n$) сводится по определению к исследованию устойчивости решений соответствующей нормальной линейной системы

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n, \\ x_n' = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n, \end{cases} \Leftrightarrow x' = Ax, \quad (2)$$

где $x_1(t) = x(t)$.

Заметим, что при изложении этих вопросов студентам полезно разъяснить физический смысл устойчивости решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Для исследования устойчивости решений системы (2) требуется характеристическое уравнение системы:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_n & \dots & -a_3 & -a_2 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Конечно, оно с точностью до множителя $(-1)^n$ совпадает с характеристическим уравнением, соответствующим уравнению (1):

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (4)$$

Таким образом, при исследовании устойчивости решений уравнения (1) нет необходимости выписывать соответствующую систему (2) и составлять для нее характеристическое уравнение (3), а можно сразу записать уравнение (4).

Совпадение уравнений (3) и (4) студентам не очевидно и требует объяснений. Даже саму формулировку этого факта не часто можно встретить в учебниках. Доказательства, приведенные, например, в [1, с. 84-85] и в [2, с. 182-183], явно недоступны для студентов технического вуза. Для них более простым является доказательство, основанное на прямом вычислении определителя в (3).

Сделаем соответствующие выкладки. Обозначим

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_k & \dots & -a_3 & -a_2 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель по первому столбцу, получим при $k \geq 2$

$$\Delta_k = -\lambda \Delta_{k-1} + (-1)^k a_k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = -\lambda \Delta_{k-1} + (-1)^k a_k.$$

Теперь

$$\begin{aligned} \Delta_n &= -\lambda \Delta_{n-1} + (-1)^n a_n = -\lambda(-\lambda \Delta_{n-2} + (-1)^{n-1} a_{n-1}) + (-1)^n a_n = \\ &= (-1)^2 \lambda^2 \Delta_{n-2} + (-1)^n (\lambda a_{n-1} + a_n) = \dots = \\ &= (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} \Delta_1 + (-1)^n (a_2 \lambda^{n-2} + \dots + \lambda a_{n-1} + a_n) = \\ &= (-1)^n \lambda^{n-1} (\lambda + a_1) + (-1)^n (a_2 \lambda^{n-2} + \dots + \lambda a_{n-1} + a_n) = \\ &= (-1)^n (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + \lambda a_{n-1} + a_n). \end{aligned}$$

Так как уравнение (3) имеет вид $\Delta_n = 0$, то, разделив его на $(-1)^n$, получим (4).

При отсутствии возможности проведения этого доказательства на лекции или практическом занятии, его вполне можно дать заинтересованным студентам в качестве домашнего задания или обсудить на математическом кружке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
2. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы. 1984. 272 с.

УДК 51

А. И. Шевцова

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: *alynox@yandex.ru*

О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ СТРОИТЕЛЬНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Обсуждаются вопросы, связанные с практической направленностью преподавания курса математики для студентов архитектурно-строительного факультета. Приводятся разделы математики, которым следует уделить особое внимание при обучении. Приведены конкретные примеры из дисциплины «Строительная механика».

Ключевые слова: математика, преподавание математики, использование математики в строительной механике.

A. I. Shevtsova

*Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: *alynox@yandex.ru**

ABOUT TEACHING MATHEMATICS TO STUDENTS OF CONSTRUCTION SPECIALTIES

The issues connected with practical orientation of teaching a course of mathematics for students of architectural and construction faculty are discussed. The sections of mathematics which should pay special attention when training are provided are defined. Concrete examples from discipline "Construction mechanics" are given.

Keywords: mathematics, teaching mathematics, the use of mathematics in construction mechanics.

В настоящее время трудно представить современное строительство без математических, вычислительных методов и моделей. Основным фактором, определяющим характер математического содержания обучения студентов, являются особенности их будущей профессиональной деятельности. Для привлечения внимания студентов к изучаемому материалу очень полезно в начале каждого раздела акцентировать внимание на его прикладной значимости, причем желательно на конкретных примерах.

Уже на вводной лекции можно остановиться на исторических аспектах, связанных с тесной связью математики и строительства (архитектуры). Рассказать студентам о том, что математика и строительство развивались одновременно, что потребности зарождающегося строительства и возникшей вслед за ним архитектуры, явились одним из стимулов, благодаря которым возникла и сделала первые шаги математика. При этом можно использовать соответствующие яркие и красочные слайды, предложить самим студентам подготовить и сделать соответствующие доклады, например, на занятиях математического профессионально ориентированного кружка.

Согласно требованиям федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 270800 «Строительство», студент должен

- знать: основные положения и расчетные методы, на которых базируется изучение специальных курсов всех строительных конструкций;
- уметь: разрабатывать конструктивные решения простейших зданий и ограждающих конструкций, вести технические расчёты по современным нормам;
- владеть: основными современными методами постановки, исследования и решения задач механики; навыками расчёта элементов строительных конструкций и сооружений на прочность, жёсткость и устойчивость.

Строители с древних времен, возводя различные сооружения, в первую очередь думали об их прочности и долговечности. Прочность сооружения обеспечивается не только материалом, из которого оно создано, но и конструкцией, которая используется в качестве основы при проектировании [2]. Расчетами на прочность, жесткость и устойчивость занимаются такие обязательные в обучении студентов строительных специальностей дисциплины как сопротивление материалов и строительная механика. Фундаментальные знания в области данных наук содействуют также более экономичному расходованию материальных и финансовых ресурсов, что является наиболее важным в деятельности любого из нас, в том числе и будущего специалиста-строителя.

Анализ рабочих программ и учебной литературы специальных дисциплин для студентов-архитекторов [2-6] позволяет прийти к выводу, что именно в строительной механике наиболее широко используются аналитические и численные методы, которые даются в курсе высшей математики. Хороший архитектор должен знать аналитическую геометрию, основы высшей алгебры, теорию матриц, математический анализ, владеть методами математического моделирования и оптимизации. В последнее время особенно распространено использование матричного исчисления, итерационных, графических и графоаналитических методов.

Приведем конкретные примеры.

Уже в первых разделах курса строительной механики изучается расчёт статически определимых конструкций, таких как многопролётные статически определимые балки, арки, фермы и рамы, и рассматриваются теоретические обоснования классических методов определения перемещений.

Примеры решаемых в этих разделах задач:

1. Сооружение, воспринимая внешнюю нагрузку, через свои элементы передает ее опорам, вызывая в них опорные реакции. При определении опорных реакций используется принцип освобождения от связей. Получаются уравнения равновесия, из которых определяются величины опорных реакций:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M_A = 0,$$

где $\sum X, \sum Y$ - сумма проекций на оси x и y ;

$\sum M_A$ - сумма моментов всех сил относительно любой точки A плоскости.

Далее проводится построение линий влияния опорных реакций и анализ выражений для опорных реакций. Например, для реакции

$$R_A = F \frac{l-x}{l},$$

где F – сосредоточенная сила; l – длина балки; x – расстояние от точки до сечения, уравнение описывает прямую линию.

2. При определении внутренних усилий системы с помощью линий влияния, когда на балку действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q и сосредоточенная сила, то усилие от загрузения находится по формуле

$$S_q = \int_a^b q \cdot y dl.$$

3. При определении внутренних усилий сложных статически определимых систем методом замены связей получают условия эквивалентности в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} S_{11}X_1 + S_{12}X_2 + \dots + S_{1n}X_n + S_{1p} = 0, \\ S_{21}X_1 + S_{22}X_2 + \dots + S_{2n}X_n + S_{2p} = 0, \\ \dots \\ S_{n1}X_1 + S_{n2}X_2 + \dots + S_{nn}X_n + S_{np} = 0, \end{cases}$$

где 1, 2, 3, ..., n – заменяемые связи, X_1, X_2, \dots, X_n – неизвестные внутренние усилия в этих связях, S_{ij} – усилие в i -той связи в j -том единичном состоянии, S_{ip} – усилие в i -той связи в грузовом состоянии.

Уже из этих примеров видно, что в курсе строительной механики используются практически все стандартные разделы математики. Поэтому при обучении математики студентов архитектурно-строительного факультета наряду с профессиональной направленностью подготовки важными остаются все основные задачи и цели обучения математике: приобретение студентами определенного круга знаний, умения использовать изученные математические методы, развитие математической интуиции, воспитание математической культуры, развитие рациональных качеств мысли и ее выражения (порядок, точность, ясность, сжатость). Исходя из этого, математика предоставляет широкие возможности для формирования профессиональных качеств личности инженера-строителя, тем самым подчеркивая ее фундаментальную значимость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куимова Е.И. Прикладная направленность курса математики в строительном вузе/ Куимова К.А., Титова Е.И. // Молодой ученый. 2014. №11. С. 390-391.
2. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов : учебник / А.Е. Саргсян [и др.]. 2-е изд. испр. и доп. М.: Высш. шк., 2000. 416 с.
3. Шакирзянов Р.А. Курс лекций по строительной механике: Учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. Казань: КГАСУ, 2014. 144 с.
4. Беленя В.А. Металлические конструкции. Общий курс: Учебник для вузов / В.А. Балдин, Г.С. Ведеников [др.]; под общ. ред. Е.И. Беленя. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1986. 560 с.
5. Байков В.Н., Железобетонные конструкции. Общий курс: Учеб. пособие для вузов / В.Н. Байков, Э.Е. Сигалов. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1991. 767 с.
6. Калугин А.В. Деревянные конструкции: Учеб. пособие (конспект лекций). М.: Изд-во «АСВ», 2003. 224 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 66.048.3.01:007

А. И. Балунов

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, e-mail: balunovai@ystu.ru

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПОНЕНТОВ АТЕРМАЛЬНЫХ СМЕСЕЙ В ПРОДУКТОВЫХ ПОТОКАХ РЕКТИФИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Рассматривается близкий к термодинамическому методу расчет составов продуктов разделения атермальных смесей в сложных ректификационных системах. В основе метода лежит расширенная версия принципа максимальной энтропии с введением в качестве критерия правдоподобия информационной энтропии сложного опыта. Приведены алгоритмы расчетов составов продуктовых потоков ректификационных систем в проектной и поверочной постановках задачи.

Ключевые слова: ректификация, сложная система, распределение компонентов, атермальная смесь, принцип максимальной энтропии, энтропия сложного опыта.

A. I. Balunov

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: balunovai@ystu.ru

PROBABILISTIC MODEL OF COMPONENTS ATHERMAL MIXTURE DISTRIBUTION IN RECTIFICATION SYSTEMS PRODUCT FLOWS

The paper presents a method for component athermal mixture calculation in flows of complex distillation systems. The described method is related to the thermodynamic method and it is based on the principle expanded version of maximum entropy with introduction as credibility criterion of information entropy difficult experience. The application algorithms for product composition calculation in project and verification distillation systems are stated.

Keywords: rectification, complex system, component distribution, athermal mixture, maximum entropy principle, complex experiment entropy.

В последние десятилетия для описания процессов химической технологии успешно развивается экстремальный принцип максимальной эн-

тропии [1-18]. В литературе этот принцип известен как формализм Джейнса [19-20] и энтропийный метод моделирования [21]. Иногда его также называют моделированием по принципу "серого ящика", имея в виду, что в отличие от кибернетического "черного ящика", в котором полностью отсутствует информация об его внутреннем устройстве, здесь информация имеется, но она всегда неполная.

Первая работа по применению энтропийного метода к моделированию процессов химической технологии была опубликована В. П. Майковым в 1975 г. и посвящена описанию процесса многокомпонентной ректификации идеальных смесей [1]. В последующие годы метод получил развитие и был использован для описания ряда других процессов и типов смесей [2-10, 15, 18]. Однако до сих пор его применение в основном ограничено системами, близкими к идеальным, так как в качестве критерия правдоподобия используется энтропия Шеннона, которая сформулирована только для идеальных систем – "каналов без шумов" [22]. Это хорошо согласуется с практикой применения информационной энтропии в теории связи, где в общем случае рассматриваются идеальные каналы и каналы с шумами. Для описания каналов с шумами используется энтропия сложного опыта, которая дополнительно включает условную энтропию и условные вероятности.

В [8-10] предложена расширенная версия принципа максимальной энтропии с введением в качестве критерия правдоподобия информационной энтропии сложного опыта. Расширенная версия использована при описании процессов фазовых превращений и ректификации многокомпонентных смесей, неидеальность которых обусловлена различием микрочастиц (компонентов) по размерам и форме (атермальные смеси). Учет атермальных свойств смеси в постановке и решении этих задач приводит к зависимостям, в которые входят коэффициенты активности, связанные с условной энтропией и условными вероятностями, в характерной для термодинамики форме. Зависимости для идеальных смесей воспроизводятся как частный случай.

В настоящей работе рассматривается применение расширенной версии принципа максимальной энтропии для определения наиболее вероятных составов продуктовых потоков сложных ректификационных систем, разделяющих атермальные смеси. К сложным ректификационным системам относятся системы простых колонн с рециклами и без них, сложные колонны с боковыми отборами, системы со связанными тепловыми потоками и другие.

Однако прежде, чем перейти к этой задаче, остановимся на особенностях учета атермальных свойств смеси и покажем, каким образом размеры и концентрации компонентов связаны с энтропийными коэффициентами активности.

Энтропийный коэффициент активности. В [7-9] показана связь между условными вероятностями и относительными размерами микрочастиц в бинарной атермальной смеси, а также установлено постоянство отношения условной вероятности к мольной доле компонента

$$p_{12} = qx_2, \quad p_{21} = qx_1, \quad (1)$$

где p_{12} – вероятность того, что в последовательности частиц, извлекаемых случайно из атермальной смеси, на месте частицы 1 будет обнаружена частица 2; p_{21} – вероятность того, что этого не произойдет, т.е. и для атермальной смеси в рассматриваемой последовательности будет обнаружена частица 1; x_1, x_2 – мольные доли компонентов 1 и 2 в смеси; q – коэффициент атермальности.

Коэффициент атермальности бинарной смеси q так же, как и относительный размер частиц δ , характеризует степень атермальности системы и, что необходимо подчеркнуть, не зависит от состава.

Для идеальной бинарной смеси $\delta = 1, q = 0$. Для другого предельного случая, когда частицы отличаются размерами на сколь угодно большую величину, $\delta = 0, q = 1$.

Поскольку связь между условной вероятностью и коэффициентом атермальности весьма простая (1), в практических расчетах удобнее пользоваться коэффициентами атермальности, а не относительными размерами частиц. Для перехода от δ к q составлена таблица значений коэффициентов атермальности, которая приведена в [7, 8]. В этих же работах предложен переход к многокомпонентным системам, основанный на постулировании постоянства отношения условных вероятностей в бинарной и многокомпонентной смеси. В последнем случае по данным таблицы составляется матрица коэффициентов атермальности q_{ik} ($i, k = \overline{1, m}$) на основе анализа значений относительных размеров частиц каждой пары компонентов многокомпонентной смеси δ_{ik} ($i, k = \overline{1, m}$).

Располагая коэффициентами атермальности и составом многокомпонентной смеси, можно рассчитать условные вероятности

$$p_{ik} = \frac{q_{ik}x_k}{x_i + x_k(1 - q_{ik})} \bigg/ \sum_{k=1}^m \frac{q_{ik}x_k}{x_i + x_k(1 - q_{ik})}, \quad i, k = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где формально принято, что $q_{ik=i} = 1$.

Формула (2) указывает на зависимость условных вероятностей от концентраций. С другой стороны, при решении задачи о распределении компонентов в продуктовых потоках значения p_{ik} далее будут предполагаться известными для каждого выходного потока системы. Объяснение этого кажущегося противоречия приведено в [9].

Частная условная энтропия H_i , относящаяся к компоненту i , определяется выражением

$$H_i = -\sum_{k=1}^m p_{ik} \ln p_{ik}, \quad i = \overline{1, m},$$

и по определению связана с энтропийным коэффициентом активности этого компонента соотношением [8–10]

$$\gamma_i = \exp(-H_i), \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где γ_i – энтропийный коэффициент активности компонента i .

Таким образом, для расчета энтропийных коэффициентов активности необходимо располагать матрицей коэффициентов атермальности и составом смеси.

Следует подчеркнуть, что энтропийные коэффициенты активности учитывают неидеальность только атермального характера [8, 9].

Наиболее вероятное распределение компонентов. Рассмотрим ректификационную систему, предназначенную для разделения исходной m -компонентной атермальной смеси на p продуктов (потоков). Обозначим мольный расход j -го продукта, приведенный к единице исходной смеси, (относительный отбор продукта) – ε_j ($j = \overline{1, p}$); концентрацию i -го компонента в исходной смеси – z_i ($i = \overline{1, m}$); концентрацию i -го компонента в j -том продукте – x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p}$).

Сформулируем задачу о наиболее вероятном распределении компонентов между продуктовыми потоками сложной ректификационной системы.

Следуя формализму Джейнса [19, 20], а также учитывая особенности описания ректификации идеальных смесей [13], представим исходную информацию в следующей форме записи:

$$\sum_{j=1}^p \varepsilon_j x_{ij} = z_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, p}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} = \langle a_j \rangle, \quad j = \overline{1, p-1}, \quad (6)$$

где $a_{ij} = a_{ij}^o - a_{ip}^o$; a_{ij}^o – феноменологический коэффициент, оценивающий характерное для данной задачи свойство i -го компонента при условиях

(температуре и давлении) j -го продукта; $\langle a_j \rangle$ – среднее значение (математическое ожидание) коэффициентов a_{ij}^o для j -го продукта.

Уравнения (4) вытекают из материального баланса системы, а выражения (5) есть условия нормировки концентраций. Считается, что в продуктовых потоках присутствуют все компоненты исходной смеси, хотя бы в сколь угодно малых количествах.

Уравнения (6) являются характерными для энтропийного метода моделирования [19-21]. Они вводят свойства компонентов и фиксируют степень разделения смеси в системе при постановке задачи. Число уравнений (6) соответствует числу ограничений, которые следует наложить на систему (помимо материальных балансов и заданных отборов продуктов), чтобы поставленная задача приобрела физический смысл. Предполагается, что коэффициенты a_{ij}^o в уравнениях (6) зависят от типа частиц (молекул) и внешних параметров (температуры и давления).

Для задач с фазовыми превращениями идеальных смесей их можно выразить через константы фазового равновесия и коэффициенты относительных летучестей компонентов [13]

$$a_{ij} = a_{ij}^o - a_{ip}^o = \ln \sqrt{K_{ij}^o K_{ip}^o} = \ln K_{ij}, \quad (7)$$

$$a_{ij} - a_{nj} = \ln K_{ij} - \ln K_{nj} = \ln(K_{ij}/K_{nj}) = \ln \alpha_{ij}, \quad (8)$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, p-1},$$

где K_{ij}^o – константа фазового равновесия i -го компонента для условий j -го продукта; K_{ij} – эффективная константа фазового равновесия i -го компонента для j -го продукта; K_{nj} – то же для эталонного компонента n , выбор которого произволен; α_{ij} – эффективный коэффициент относительной летучести i -го компонента для j -го продукта.

Выражения (7), (8) справедливы и для атермальных смесей, если рассматривать K_{ij}^o как коэффициент распределения, выраженный не через отношение равновесных концентраций, а через отношение активностей [8–10].

Таким образом, решение рассматриваемой задачи заключается в определении составов продуктовых потоков x_{ij} при заданных ε_j , z_i , a_{ij} , $\langle a_j \rangle$. В общем случае число неизвестных больше числа уравнений (4)–(6). Поэтому для определения искоемых концентраций используем принцип максимальной энтропии (формализм Джейнса). Это означает, что наиболее

правдоподобный (наименее предвзятый) закон распределения компонентов будет отвечать максимуму информационной энтропии выходных потоков при соблюдении ограничений (4)–(6). В аналогичной задаче расчета наиболее вероятного распределения компонентов идеальных смесей для получения недостающей информации использовался формализм Джейнса, в основе которого лежит максимизация энтропии Шеннона [12, 13]

$$H = -\sum_{j=1}^p \varepsilon_j \sum_{i=1}^m x_{ij} \ln x_{ij}.$$

Однако применение этой функции предполагает, что вероятность обнаружения частицы i -го типа в смеси точно равна ее мольной доле. Последнее справедливо лишь в том случае, если размеры частиц одинаковы. В общем случае эта вероятность связана с размером и формой (объемом) частиц. Поэтому для оценки неопределенности искомых величин в атермальной системе будем использовать энтропию сложного опыта

$$H = -\sum_{j=1}^p \left[\varepsilon_j \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \ln x_{ij} + \sum_{i=1}^m x_{ij} H_{ij} \right) \right], \quad (9)$$

где H_{ij} – частная условная энтропия, относящаяся к i -му компоненту в j -том потоке.

В качестве меры неопределенности энтропия сложного опыта (9) выбрана на основе следующих соображений. Согласно формализму Джейнса для получения информации о составах потоков необходимо провести мысленный эксперимент, заключающийся в определении типа частиц, случайно извлекаемых из каждого потока. При этом если принять, что размеры частиц одинаковы (идеальная смесь), вероятность извлечения частицы i -го типа равна ее мольной доле в потоке. Неопределенность результатов серии таких опытов оценивает шенноновская энтропия, входящая в состав функции (9). Если частицы (компоненты) различаются по размерам (атермальная смесь), то возникает дополнительная неопределенность, связанная с переносом результатов опытов, проведенных с идеальной смесью, на неидеальную смесь. Для устранения этой неопределенности надлежит провести дополнительные опыты, заключающиеся в выявлении того, как результат опыта с идеальной смесью должен измениться при переходе к неидеальной. Для оценки неопределенности таких опытов следует ввести дополнительные характеристики – условные вероятности p_{ik}^j , а также частные условные энтропии

$$H_{ij} = -\sum_{k=1}^m p_{ik}^j \ln p_{ik}^j, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, p},$$

где p_{ik}^j – вероятность того, что в последовательности частиц, извлекаемых случайно из j -го потока атермальной смеси, на месте частицы i будет обнаружена частица k ; p_{ki}^j – вероятность того, что этого не произойдет, т.е. и для атермальной смеси в рассматриваемой последовательности будет обнаружена частица i .

Теперь формально задача сводится к следующему: при известных значениях z_i ($i = \overline{1, m}$) и ε_j ($j = \overline{1, p}$), а также заданных величинах a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p}$), $\langle a_j \rangle$ ($j = \overline{1, p-1}$), p_{ik}^j ($i, k = \overline{1, m}, j = \overline{1, p}$), требуется найти такие значения x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p}$), которые доставляли бы максимум энтропии (9) при соблюдении ограничений (4)–(6).

Задачу решаем методом неопределенных множителей Лагранжа. Вводим неопределенные множители σ_i ($i = \overline{1, m}$), $\mu_j \varepsilon_j$, λ_j ($j = \overline{1, p}$) для ограничений (4)–(6) и составляем вспомогательную функцию

$$F = H + \sum_{i=1}^m \left(\sigma_i \sum_{j=1}^p \varepsilon_j x_{ij} \right) + \sum_{j=1}^p \left(\mu_j \varepsilon_j \sum_{i=1}^m x_{ij} \right) + \sum_{j=1}^p \left(\varepsilon_j \lambda_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \right).$$

В использованной форме записи $\lambda_p = 0$.

Дифференцируя эту функцию по переменным x_{ij} и приравнявая производные нулю, получаем необходимые условия максимума энтропии (9)

$$\frac{\partial F}{\partial x_{ij}} = -\varepsilon_j (1 + \ln x_{ij}) + \varepsilon_j H_{ij} + \sigma_i \varepsilon_j + \mu_j \varepsilon_j + \lambda_j \varepsilon_j a_{ij} = 0,$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, p}.$$

Для $\lambda_p \neq 0$ получаем решение

$$x_{ij} = \exp(\sigma_i + \mu_j + \lambda_j a_{ij} + H_{ij} - 1), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, p}. \quad (10)$$

После этого имеем замкнутую систему $m+2p-1+mp$ уравнений (4)–(6) и (10) для определения mp неизвестных концентраций и $m+2p-1$ множителей Лагранжа.

Далее основные выкладки будут касаться решения полученной системы алгебраических уравнений.

Используя (4), из выражения (10) можно исключить множители σ_i :

$$x_{ij} = z_i \exp(\mu_j + \lambda_j a_{ij} + H_{ij}) / \sum_{j=1}^p \varepsilon_j \exp(\mu_j + \lambda_j a_{ij} + H_{ij}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, p}. \quad (11)$$

Для исключения множителей λ_j , входящих в уравнения (11), можно было бы воспользоваться ограничениями (5) или (6). Однако в практике расчетов бывают заданы не величины $\langle a_j \rangle$, ограничивающие степень разделения согласно исходной постановке задачи, а концентрации отдельных компонентов в продуктовых потоках системы. Поэтому вместо $p-1$ уравнений (6), вводим $p-1$ уравнений (11), записанных для заданных концентраций

$$x_{kl} = z_k \exp(\mu_l + \lambda_l a_{kl} + H_{kl}) / \sum_{j=1}^p \varepsilon_j \exp(\mu_j + \lambda_j a_{kj} + H_{kj}), \quad l = \overline{1, p-1},$$

где x_{kl} – заданная концентрация компонента k в продукте l .

После преобразований последние уравнения можно привести к системе линейных уравнений относительно $\exp(\mu_j)$

$$\sum_j^{p-1} \varepsilon_j C_{ff} \exp(\lambda_j a_{mj}) \exp(\mu_j) = -\varepsilon_p C_{fp} \exp(\lambda_p a_{mp}) \exp(\mu_p), \quad f = \overline{1, p-1},$$

где f – порядковый номер заданной концентрации x_{kl} ;

$$C_{ff} = \begin{cases} \exp[\lambda_j (a_{kj} - a_{mj}) + H_{kj}], & \text{если } j \neq l, \\ \left(1 - \frac{z_k}{x_{kl} \varepsilon_l}\right) \exp[\lambda_l (a_{kl} - a_{ml}) + H_{kl}], & \text{если } j = l. \end{cases}$$

Решая систему линейных уравнений, находим

$$\exp(\mu_j) = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_j} \exp(\lambda_p a_{mp} - \lambda_j a_{mj}) \exp(\mu_p) \frac{D_j}{D_p},$$

где $D_p = \det \|C_{ff}\|$; $D_j = -\sum_{f=1}^{p-1} A_{ff} C_{fp}$; $f = \overline{1, p-1}$; A_{ff} – алгебраическое дополнение матрицы с элементами C_{ff} в определителе D_p .

Подставляя значение $\exp(\mu_j)$ в (11), имеем

$$x_{ij} = z_i \exp[\lambda_j (a_{ij} - a_{mj}) + H_{ij}] D_j / \varepsilon_j \sum_{j=1}^p \exp[\lambda_j (a_{ij} - a_{mj}) + H_{ij}] D_j, \\ i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, p}.$$

С учетом (3) и (8) получаем решение в окончательном виде

$$x_{ij} = z_i \alpha_{ij}^{\lambda_j} \gamma_{ij} D_j / \varepsilon_j \sum_{j=1}^p \alpha_{ij}^{\lambda_j} \gamma_{ij} D_j, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, p}, \quad (12)$$

$$\text{где } C_{jj} = \begin{cases} \alpha_{kj}^{\lambda_j} \gamma_{kj}, & \text{если } j \neq l, \\ \left(1 - \frac{z_k}{x_{kj} \varepsilon_l}\right) \alpha_{kl}^{\lambda_l} \gamma_{kl}, & \text{если } j = l. \end{cases}$$

При $p=2$ получаем формулы для расчета составов продуктов разделения простой колонны. Если задана концентрация x_{k1} , то $D_1 = -\alpha_{k2}^{-\lambda_2} \gamma_{k2} = -\gamma_{k2}$, $D_2 = (1 - z_k / \varepsilon_1 x_{k1}) \alpha_{k1}^{\lambda_1} \gamma_{k1}$, а зависимости для расчета концентраций компонентов в дистилляте ($j=1$) и кубовом остатке ($j=2$) принимают известную форму [8, 10]

$$x_{i1} = z_i / \left[\varepsilon_1 + \frac{z_k - \varepsilon_1 x_{k1}}{x_{k1}} \cdot \frac{\gamma_{i1}}{\gamma_{i2}} \cdot \frac{\gamma_{k2}}{\gamma_{k1}} \cdot \left(\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{k1}} \right)^{-\lambda_1} \right], \quad i = \overline{1, m}, \quad (13)$$

$$x_{i2} = z_i / \left[\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2 x_{k1}}{z_k / \varepsilon_1 - x_{k1}} \cdot \frac{\gamma_{i2}}{\gamma_{i1}} \cdot \frac{\gamma_{k1}}{\gamma_{k2}} \cdot \left(\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{k1}} \right)^{\lambda_1} \right], \quad i = \overline{1, m}. \quad (14)$$

Для простой колонны параметр λ_1 является корнем любого из двух уравнений нормировки (5), решаемых совместно с (13) или (14).

Физический смысл лагранжевых множителей. Распределению (13), (14) отвечает линейно-логарифмическое соотношение

$$\lambda_1 = \ln \left(\frac{x_{i1} \gamma_{i1}}{x_{i2} \gamma_{i2}} \cdot \frac{x_{k2} \gamma_{k2}}{x_{k1} \gamma_{k1}} \right) / \ln \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{k1}}, \quad i, k = \overline{1, m}, \quad i \neq k,$$

которое является обобщением известного в теории равновесной ректификации уравнения Фенске-Андервуда для числа теоретических ступеней контакта в безотборном режиме. Последнее получается как частный случай для идеальных смесей при $\gamma_{ij} = 1$, ($i = \overline{1, m}$, $j = 1, 2$).

Таким образом, для двухпродуктовой системы (ректификационной колонны) множитель Лагранжа λ_1 с точки зрения теории равновесной ректификации имеет физический смысл минимального числа теоретических ступеней контакта, необходимых для достижения заданного качества разделения, и характеризует разделительную способность (условную высоту) колонны.

Для многопродуктовой системы физический смысл множителей λ_j , как минимального числа теоретических ступеней контакта, необходимых для разделения исходной смеси на продукты с j до p и выполнении требований на заданное качество разделения, сохраняется.

Практика применения энтропийного метода к описанию процессов химической технологии показала, что окончательные расчетные зависимости содержат только разность феноменологических коэффициентов a_{ij}^o . Поэтому начало отсчета этих коэффициентов не влияет на структуру конечных формул, а приводит лишь к новой системе отсчета множителей Лагранжа, вводимых для ограничений типа (6). В настоящей работе за начало отсчета коэффициентов a_{ij}^o выбраны их значения при условиях (температуре и давлении) потока p . Такую систему отсчета удобно применять, когда заданы концентрации целевых компонентов в потоках с 1 по $p-1$. Если по условиям задачи не закреплена концентрация в одном из промежуточных продуктовых потоков системы, то начало отсчета коэффициентов a_{ij}^o удобно перенести к условиям этого потока [13].

Алгоритм проектного расчета. Проектный расчет системы позволяет определить условную высоту элементов системы (секций) λ_j и распределения компонентов в продуктовых потоках x_{ij} при известных значениях параметров $z_i, \varepsilon_j, \alpha_{ij}, q_{ik}$ ($i, k = \overline{1, m}, j = \overline{1, p}$), а также заданных величинах концентраций целевых компонентов в $p-1$ продуктах разделения x_{ki} . Коэффициенты относительных летучестей компонентов в начале расчета принимаются для температур выходных потоков, оцениваемых приближенно. После определения составов выходных потоков температуры уточняются, и в случае необходимости проводится повторный расчет [18].

При разделении идеальных смесей ($\gamma_{ij} = 1$) алгоритм сводится к определению значений множителей λ_j в результате решения системы уравнений (5), (12) и расчету концентраций x_{ij} по формулам (12).

Для атермальных смесей алгоритм расчета приобретает итерационный характер, так как энтропийные коэффициенты активности в выражениях (12) зависят от составов продуктовых потоков, которые еще только предстоит определить, и сводится к следующему:

1. Первоначально все коэффициенты активности принимаются равными единице, т.е. смесь считается идеальной.
2. Находятся значения параметров λ_j в результате решения системы уравнений (5).
3. Рассчитываются составы продуктовых потоков по формулам (12).
4. Уточняются значения коэффициентов активности, используя составы, рассчитанные на предыдущем шаге.

5. Расчет повторяется, начиная с п.2, до совпадения с заданной точностью составов, полученных в двух последовательных итерациях. Степень точности может задаваться либо по одному компоненту, либо по всем компонентам через осредненную оценку.

Задача проектного расчета ректификационной системы имеет физический смысл и тогда, когда число заданных концентраций меньше, чем $p-1$, но нет смежных продуктовых потоков с незакрепленными концентрациями [13]. В такой постановке незакрепленные концентрации целевых компонентов могут быть найдены из условия максимума энтропии (9) в результате многократного решения уравнений модели (5) и (12).

Алгоритм поверочного расчета. Поверочный расчет проводят при анализе и оптимизации действующих ректификационных систем. Исходными данными наряду с z_i , ε_j , α_{ij} , q_{ik} являются множители λ_j ($j = \overline{1, p-1}$), которые играют роль параметров идентификации модели, а определению по-прежнему подлежат составы выходных потоков x_{ij} . При такой постановке задачи зависимости для расчета коэффициентов C_{ff} в формулах (12) удобно преобразовать к иному виду.

Приняв целевыми гипотетические граничные компоненты, для которых выполняются условия $z_{sp} = x_{sp1}$, после преобразований получим

$$C_{ff} = \begin{cases} \alpha_{spj}^{\lambda_j}, & \text{если } j \neq f, \\ (1-1/\varepsilon_f) \alpha_{spf}^{\lambda_f}, & \text{если } j = f, \quad j, f = \overline{1, p-1}, \end{cases} \quad (15)$$

где α_{spj} – коэффициент относительной летучести граничного компонента для потока j .

В случае разделения идеальных смесей алгоритм сводится к определению значений α_{spj} ($j = \overline{1, p-1}$) в результате решения системы уравнений (5), (12) с новыми коэффициентами C_{ff} (см. (15)) и расчету концентраций x_{ij} по формулам (12).

Для атермальных смесей алгоритм поверочного расчета приобретает итерационный характер, аналогичный проектному расчету.

При $p=2$ получаем $D_1 = -1$; $D_2 = (1-1/\varepsilon_1) \alpha_{sp1}^{\lambda_1}$, а зависимости для расчета концентраций компонентов в дистилляте и кубовом остатке двухпродуктовой колонны принимают вид

$$x_{i1} = z_i / \left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \frac{\gamma_{i1}}{\gamma_{i2}} \cdot \left(\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{sp1}} \right)^{-\lambda_1} \right], \quad x_{i2} = z_i / \left[\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \frac{\gamma_{i2}}{\gamma_{i1}} \cdot \left(\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{sp1}} \right)^{\lambda_1} \right], \quad i = \overline{1, m}.$$

Для простой колонны параметр $\alpha_{сп1}$ является корнем любого из двух уравнений нормировки концентраций.

Заключение. Практика расчетов показала, что распределения компонентов, полученные на основе вероятностной модели и традиционного термодинамического метода расчета, практически идентичны.

Введение в экстремальный принцип максимальной энтропии в качестве критерия правдоподобия информационной энтропии сложного опыта является его расширением по крайней мере на определенный класс неидеальных систем – атермальные смеси. Расширенный принцип позволяет на единой методологической основе проводить расчет многокомпонентной ректификации как идеальных, так и неидеальных (атермальных) смесей.

Особенность задачи расчета составов продуктовых потоков такова, что учет атермальности смеси приводит прежде всего к увеличению значений множителей Лагранжа λ_j , оценивающих протяженность процесса, и не оказывает существенного влияния на состав продуктов. При этом влияние атермальных свойств смеси уменьшается с увеличением четкости разделения и уменьшением различия в относительных размерах молекул компонентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Майков В.П.* Статика многокомпонентной ректификации // Теория и расчет разделительных систем. Системно-информационный подход: Межвуз. сб. / под ред. В.П. Майкова. М.: МИХМ, 1975. С. 31–79.
2. *Майков В.П.* Энтропийные методы моделирования технологических процессов. М.: МИХМ, 1982. 88 с.
3. Процессы и аппараты химической техники. Системно-информационный подход: Межвуз. сб. / под ред. В.П. Майкова. М.: МИХМ, 1977. 160 с.
4. Энтропийные методы моделирования в химической технике: Межвуз. сб. / под ред. В.П. Майкова. М.: МИХМ, 1981. 160 с.
5. *Майков В.П.*, Ректификация непрерывных смесей. Системно-информационный подход / В.П. Майков, К.К. Моругин. М.: МИХМ, 1979. 88 с.
6. *Майков В.П.* Расчет составов дистиллята и кубового продукта при ректификации непрерывной и дискретно-непрерывной смеси на основе вероятностной (информационной) модели / В.П. Майков, К.К. Моругин, Н.М. Караваяев // Доклады АН СССР. 1978. Т. 239, №5. С. 1157–1160.
7. *Майков В.П.* Условная энтропия в описании свойств атермальности / В.П. Майков, А.И. Балунов // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2004. Т.47, № 8. С. 76–81.
8. *Майков В.П.* Ректификация атермальных смесей. Системно-информационный подход / В.П. Майков, А.И. Балунов. М.: МИХМ. 1979. 88 с.

9. *Балунов А.И.* Расширенный принцип максимальной энтропии для описания процесса фазовых превращений в атермальной системе / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2014. Т.57, № 12. С. 93–99.
10. *Балунов А.И.* Описание процесса многокомпонентной ректификации на основе расширенного принципа максимальной энтропии / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. МГТУ «МАМИ». 2014. Т.3, № 4 (22). С. 31–44.
11. *Майков В.П.* Расчет ректификационных колонн. Системно-информационный подход / В.П. Майков, А.А. Цветков М.: МИХМ, 1977. 88 с.
12. *Майков В.П.* Вероятностная (информационная) модель распределения компонентов в продуктах разделения многопродуктовых ректификационных систем / В.П. Майков, И.Г. Мухамадеев, Н.М. Караваев // Доклады АН СССР. 1977. Т. 232, № 3. С. 667–670.
13. *Балунов А.И.* Расчет составов продуктовых потоков сложных ректификационных систем на основе принципа максимальной энтропии / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2013. Т.56, № 9. С. 96–102.
14. *Майков В.П.* Анализ процесса многокомпонентной ректификации с неравновесными ступенями контакта / В.П. Майков, А.И. Балунов, Н.М. Караваев // Доклады АН СССР. 1979. Т. 246, №3. С. 674–678.
15. *Балунов А.И.* Термодинамический метод расчета составов продуктов разделения при ректификации непрерывных и дискретно-непрерывных смесей / А.И. Балунов, О.В. Дзюба, В.П. Майков // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 1996. Т. 39, № 1-2. С. 86–89.
16. *Балунов А.И.* Энтропия и информация в теории ректификации / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2003. Т.46, № 9. С. 54–67.
17. *Балунов А.И.* Оптимальный отбор продуктов в процессе ректификации. Энтропийно-информационный анализ / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2013. Т.56, № 4. С. 97–106.
18. *Балунов А.И.* Энтропийный метод моделирования фазовых переходов в системах разделения непрерывных смесей / А.И. Балунов, П.В. Куделин // Математика и естественные науки. Теория и практика. Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 166–178.
19. *Jaynes E.T.* Information Theory and Statistical Mechanics // I. The Physical Review. 1957. V. 106, N 4. P. 620–630. II. The Physical Review. 1957. V. 108, N 2. P. 171–190.
20. *Трайбус М.* Термостатика и термодинамика. М.: Энергия. 1970. 504 с.
21. *Вильсон А. Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем. М.: Наука, 1978. 248 с.
22. *Шеннон К.Э.* Математическая теория связи // Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С.243–322.

УДК 624.072

А. Л. Балушкин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *balushkinal@ystu.ru*

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА АРМИРОВАННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ УСИЛЕНИИ МЕТОДОМ НАРАЩИВАНИЯ

Представлена модель, позволяющая оценивать параметры напряженно-деформированного состояния стержневых железобетонных элементов в процессе усиления. Алгоритм расчета разработан с учетом последовательности выполнения всех этапов работ по усилению конструкции.

Ключевые слова: железобетонный стержень, усиление, режимные нагрузки.

A. L. Balushkin

*Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: balushkinal@ystu.ru*

FEATURES OF THE CALCULATION OF REINFORCED BAR STRUCTURES WITH STRENGTHENING BY THE METHOD OF BUILD-UP

A model is presented that makes it possible to evaluate the parameters of the stress-strain state of the rod reinforced concrete elements in the process of strengthening. The calculation algorithm is designed based on the sequence of the implementation of all stages of the work to strengthen the structure.

Keywords: reinforced concrete bar, strengthening, regime loading.

В процессе жизненного цикла некоторым изгибаемым железобетонным элементам требуется провести процедуру повышения несущей способности. Это связано с изменениями параметров технологического процесса, аварийными воздействиями, эксплуатацией в условиях действия агрессивных сред. Как правило, усиливаются железобетонные элементы, работающие с трещинами, поэтому сцепление арматуры с бетоном в таких конструкциях характеризуется значительно большей податливостью по сравнению с элементами, в которых силовые трещины отсутствуют. Для ЖБК, эксплуатирующихся в условиях агрессивных сред, характерно проявление процессов коррозии арматуры, что также сопровождается значи-

тельным снижением расчетных параметров сцепления: прочности и жесткости сцепления арматуры с бетоном.

Одним из распространенных способов повышения несущей способности изгибаемых железобетонных элементов является способ усиления методом наращивания, заключающийся в добавлении к существующей арматуре в растянутой зоне A_{s2} дополнительной арматуры усиления A_{ad2} . Современный способ усиления железобетонных элементов композитными материалами, на основе высокопрочных синтетических волокон, также в первую очередь предусматривает добавление армирования в растянутой зоне. Варианты усиления представлены на рис. 1.

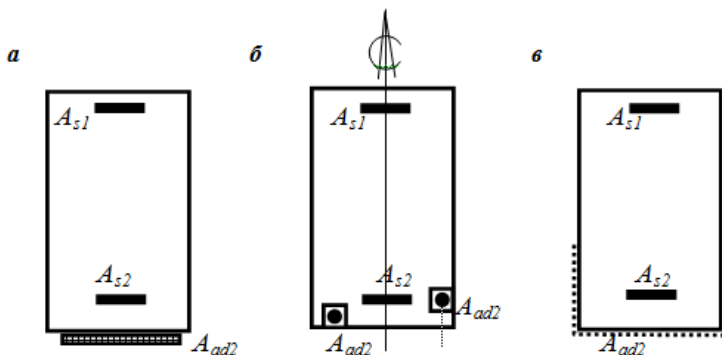


Рис. 1. Возможные схемы усиления сечения железобетонного элемента композиционными материалами на основе углеродных, базальтовых, кевларовых и стеклянных волокон с использованием:
 а – ламелей (ламинатов); б – композитных дискретных стержней;
 в – однонаправленных холстов, мультиаксиальных тканей

Соединение элементов усиления с усиливаемым железобетонным элементом может осуществляться по-разному, но во всех случаях такое соединение следует рассматривать как податливое по отношению к бетонной ветви. В таком случае усиливаемый железобетонный элемент можно рассматривать как составной стержень, состоящий как минимум из четырех ветвей: бетонной ветви и трех гибких арматурных ветвей работающих на растяжение или сжатие. Арматурные ветви: A_{s1} , A_{s2} и A_{ad2} при соединены к бетонной ветви абсолютно жесткими поперечными связями и податливыми связями сдвига, имеющими жесткости соответственно: $G_{link,1}$, $G_{link,2}$ и $G_{link,ad2}$. Спецификой работы подобных конструкций является возникновение взаимных сдвигов по длине стержня между бетонной ветвью и арматурными ветвями: $g_{s1}(x)$, $g_{s2}(x)$ и $g_{ad2}(x)$. При хорошем техническом состоянии бетона в сжатой зоне, на этапе предварительных расчетов, можно

принять, что сцепление арматуры A_{s1} с бетоном абсолютно жесткое, тогда $G_{link,1} \rightarrow \infty$; $g_{s1}(x) = 0$.

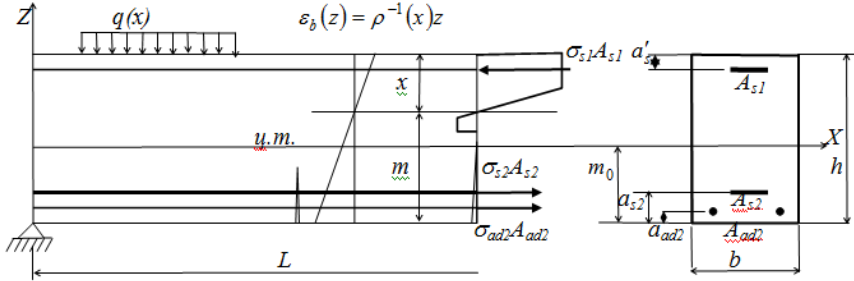


Рис. 2. Схема железобетонного элемента после усиления дополнительной арматурой A_{ad2}

Расчет усиливаемых железобетонных стержневых конструкций выполняется в три этапа.

На первом этапе оцениваются параметры напряженно-деформированного состояния (НДС) исходного элемента при действующей эксплуатационной нагрузке до усиления. Поскольку у данных элементов жесткость сцепления может быть значительно снижена в результате проявления негативных факторов в процессе жизненного цикла, расчет выполняется, используя модель составного стержня, состоящего из бетонной и одной арматурной ветви A_{s2} с учетом переменных значений жесткости сцепления по длине $G_{link,2}(x)$.

Дифференциальное уравнение, выражающее условие взаимности деформирования бетонной и арматурной ветви в шве, вместе с граничными условиями определяет краевую задачу 1-го типа относительно неизвестного - сдвигающего усилия в шве $T_{s2}(x)$.

$$\begin{aligned} (T'_{s2}(x)G_{link,2}^{-1}(x))' - T_{s2}(x)\gamma_{s2}(x) &= \Delta_2(x), \quad 0 < x < L, \\ T_{s2}(0) &= T_{s2}(L) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\gamma_{s2}(x) = (E_{s2}A_{s2})^{-1} + A_e^{-1} + (m_0 - a_{s2})^2 B_e^{-1} F(N_{s2}, \rho^{-1}), \quad (2)$$

$$\Delta_2(x) = -M(x)B_e^{-1}(m_0 - a_{s2})F(N_{s2}, \rho^{-1}), \quad (3)$$

$$G_{link,2}^{-1} = (m_0 - a_{s2}) / (bG_b) + t_{con,2} / (p_{s2}G_{con2}), \quad (4)$$

где B_e , A_e , m_0 - соответственно упругая жесткость бетонной ветви при изгибе; жесткость при растяжении-сжатии; расстояние от нижней грани до

центра тяжести сечения; E_{s2} – модуль упругости арматуры A_{s2} ; G_b – модуль сдвига бетона; $t_{con}, p_{s2}, G_{con,2}$ – параметры сцепления для A_{s2} соответственно: толщина контактной зоны, суммарный периметр сечения арматуры, модуль сцепления; $F(N_{s2}; \rho^{-1})$ – функция нелинейности, учитывающая развитие неупругих деформаций в ветвях составного стержня и трещинообразование; $M(x)$ – изгибающий момент в рассматриваемом сечении от внешней нагрузки ρ^{-1} - кривизна в сечении бетонной ветви.

Дифференциальное уравнение: линейное, неоднородное с переменными, сильно меняющимися коэффициентами, поскольку в трещине $G_{link,2}(x \rightarrow x_{crc}) = 0$, а на участках между трещинами при обеспеченном сцеплении арматуры с бетоном можно принять, что $G_{link,2}(x \rightarrow x_{crc} \pm l_{crc}/2) \rightarrow \infty$. В процессе расчета решение становится разрывным (разрывы второго рода в «функции потока» $-g_{s2}(x)$, стационарные). Расположение разрывов заранее неизвестно. Задача решается численно с использованием МКР на динамических адаптивно подвижных сетках в сочетании с методом шагового нагружения, реализующим «метод установления» в трактовке С. К. Годунова. Значение внешней нагрузки q^k на текущем k – шаге нагружения определяется как $q^k = q^{k-1} + \Delta q^k$. Приращение внешней нагрузки на текущем шаге счета Δq^k вычисляется по специальной схеме для минимизации общего числа шагов счета. В расчете используются однородные, неявные, дивергентные разностные схемы, полученные методом конечных объемов.

Результатом решения краевой задачи является значение сдвигающего усилия в зоне контакта бетонной ветви и арматуры $T_{s,2}(x)$. Для обычных армированных стержней $T_{s,2}(x) \equiv N_{s2}(x)$ отождествляется с усилием в арматурной ветви A_{s2} . В процессе решения задачи определяется функция «потока» $g_{s2}(x) = T'_{s2}(x)G_{link,2}^{-1}$, и «скорость потока»: $g'_{s2}(x) = (T'_{s2}G_{link,2}^{-1})'$. Данные параметры позволяют однозначно оценить все параметры НДС армированного стержня. Поскольку в сечении с трещиной $G_{link,2}(x \rightarrow x_{crc}) = 0$, то для решения системы уравнений используется метод потоковой прогонки, позволяющий учитывать особые точки в области решения задачи, а также избежать процедур численного дифференцирования, приводящий к неизбежной потере точности и сходимости. Для бетонной ветви, работающей на внецентренное сжатие, определяется кривизна $\rho^{-1}(x)$ и значение высоты сжатой зоны x , для арматурной ветви оценивается относительная деформация $\varepsilon_{s2}(x) = N_{s2}(x)/(E_{s2}A_{s2})$.

Для выполнения работ по усилению конструкция предварительно разгружается до определенного уровня, при этом требуется оценить параметры НДС в сечении после разгрузки. Расчетные зависимости для оценки

параметров НДС на этапе разгрузки разработаны для сечений с трещинами и для участков без трещин. Спецификой расчетов на втором этапе является получение зависимостей «изгибающий момент – кривизна» на этапе разгрузки. Такие зависимости для железобетонных элементов прямоугольного сечения получены в работе [1].

На втором этапе разгрузки решается подобная краевая задача с определением ΔT_{s2} – изменение сдвигающего усилия в процессе разгрузки конструкции. $\Delta T_{s2} = T_{s2,0} - T_{s2,p}$. Здесь $T_{s2,0}$ – сдвигающее усилие при действующей нагрузке на первом этапе перед началом разгрузки, $T_{s2,p}$ – сдвигающее усилие после разгрузки конструкции.

$$\begin{aligned} (\Delta T'_{s2}(x) G_{link,p2}^{-1}(x))' - \Delta T_{s2}(x) \gamma_{s2}(x) &= \Delta_{2,p}(x), 0 < x < L, \\ \Delta T_{s2}(0) = \Delta T_{s2}(L) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Delta_{2,p}(x) = \Delta_{2,0} - \Delta_2 + T_{s2,0} (\gamma_{s2,0} - \gamma_{s2}). \quad (6)$$

Значения параметров: $\Delta_{2,0}$, $T_{s2,0}$, $\gamma_{s2,0}$ определено на первом этапе решения задачи, индекс «0» обозначает начало разгрузки.

Жесткость связей сдвига на этапе разгрузки $G_{link,p2}$ корректируется в процессе расчета после вычисления $T_{s2}(x)$ и $g_{s2}(x)$.

$$G_{link,p2} = \frac{T'_{s2,0} - T'_{s2,p}}{g_{s2,0} - g_{s2,p}}. \quad (7)$$

Чтобы осуществить первоначальные вычисления $T_{s2}(x)$ и $g_{s2}(x)$ для второго этапа расчета, принимаем, что значения жесткости связей сдвига $G_{link,p2}(x)$ наследуются с предыдущего этапа.

Поскольку значения $T_{s2,0}(x)$ определены на первом этапе решения задачи, на основании данных о $\Delta T_{s2}(x)$ получаем данные о $T_{s2,p}$, $g_{s2,p}$, $g'_{s2,p}$ после разгрузки конструкции. Используя указанные параметры, оцениваются компоненты НДС бетонной ветви, прежде всего остаточные деформации бетона $\varepsilon_{b,p}(x, z)$ и остаточная кривизна $\rho_p^{-1}(x)$ после разгрузки конструкции.

В процессе работ по реконструкции при добавлении в конструкции элемента армирования A_{ad2} изменяется расчетная схема составного стержня, который трансформируется в составной стержень, состоящий из трех ветвей: бетонной ветви с присоединенными двумя гибкими арматурными ветвями, работающими на растяжение. Арматурные ветви имеют разные прочностные и деформативные характеристики и разное закрепление по концам бетонной ветви. Арматурная ветвь усиления A_{ad2} может иметь начальное предварительное напряжение $\sigma_{ad2,0}$.

На третьем этапе расчета рассматривается железобетонный изгибаемый элемент - армированный составной стержень, имеющий в бетонной ветви систему стабилизированных дискретных трещин, расположенных в определенных сечениях по длине элемента. При выполнении расчета усиленного элемента учитываются трещины в бетонной ветви путем выбора для расчетных узлов конечно-разностной сетки разных диаграмм «момент-кривизна» полученных для целой бетонной ветви и для сечения бетонной ветви с трещиной. Расчет усиленного элемента при повторном (режимном) нагружении осуществляется в режиме виртуального силового деформирования. Приращение внешней нагрузки на текущем k – шаге счета Δq^k можно задать больше, чем на первом этапе расчета, что сократит время счета, поскольку зависимости «момент-кривизна» для сечений с трещинами, до уровня нагружения, когда $M(x) < M_0(x)$ почти линейны.

Для решения задачи усиленного железобетонного элемента в общем случае формируется система n -дифференциальных уравнений, выражающая условия взаимности деформирования бетонной и n -арматурных ветвей в швах. Для решения краевой задачи требуется конкретизировать граничные условия, которые записываются для каждого шва отдельно и в общем случае могут быть не однотипными. Ниже представлена система линейных дифференциальных уравнений, выражающая условия взаимности деформирования бетонной и 2-х арматурных ветвей A_{s2}, A_{ad2} в швах, которая записывается в свернутом виде как:

$$\left(T'_{s,j}(x) G_{link,j}^{-1}(x) \right)' = \sum_{k=1}^2 \Delta_{jk}(x) T_{s,k}(x) + \Delta_{j0}(x), \quad (j=1,2) \quad (8)$$

$$T_{s,j}(0) = T_{s0,j}, \quad T_{s,j}(L) = T_{sL,j}, \quad (j=1,2). \quad (9)$$

Коэффициенты системы дифференциальных уравнений получены с учетом развития в бетонной ветви неупругих деформаций и трещинообразования при силовом деформировании, а также влияния усадки бетона.

$$\Delta_{jj}(x) = \left(E_{s,j} A_{s,j} \right)^{-1} + A_e^{-1} + z_{s,j}^2 B_e^{-1} F_j \left(N, \rho^{-1} \right), \quad (10)$$

$$\Delta_{j0}(x) = \left(-M(x) - \sum_{k=1}^2 N_{s0,k} z_{s,k} \right) z_{s,j} \left| F_j \left(\rho^{-1}, N \right) B_e^{-1} - \text{sign}(z_{s,j}) A_e^{-1} \sum_{k=1}^2 N_{s0,k} \right., \quad (11)$$

$$\Delta_{jk} = \text{sign}(z_{s,j} z_{s,k}) A_e^{-1} + |z_{s,j} z_{s,k}| F_j \left(\rho^{-1}, N \right) B_e^{-1}, \quad (12)$$

$$F_j \left(\rho^{-1}, N \right) = \left(1 - \left(A_e z_{s,j} \right)^{-1} \sum \omega_{0b} \right) \left(1 - B_e^{-1} \sum \omega_{0b} z_b \right)^{-1}, \quad (j=1,2). \quad (13)$$

Здесь $N_{s0,k}$ - усилие в соответствующей арматуре, учитывающее возможное предварительное напряжение, усадку бетона; $N = \sum_{j=1}^2 N_{s,j}$ - суммарная продольная сила в бетонной ветви; ω_{0b}, z_b - функции влияния, учитывают процессы нелинейного деформирования в бетонной ветви (при условии, что все арматурные ветви работают упруго); $z_{s,j}$ - расстояние от центра тяжести сечения бетонной ветви до центра тяжести соответствующей арматуры. В формулах учтено, что сжимающие усилия имеют знак плюс, Запись выражений для коэффициентов единая для всех стадий работы армированного стержня.

В результате решения системы (8), для арматурной ветви A_{s2} получается значения приращения сдвигающего усилия T_{s2} (символ Δ опускается для получения однотипной записи коэффициентов системы уравнений) при этом усилие в данной ветви определится как $N_{s2}(x) = T_{s2,p} + T_{s2}$, для арматурной ветви A_{ad2} соответствующее усилие $N_{ad2}(x) = T_{ad2}$. Далее рассчитываются значения взаимных сдвигов $g_{s2}(x)$ и $g_{ad2}(x)$, а также приращения взаимных сдвигов по длине стержня: $g'_{s2}(x), g'_{ad2}(x)$. На основании данных о деформациях арматурных ветвей $A_{s2}, A_{ad2}: \varepsilon_{s2}(x), \varepsilon_{ad2}(x)$ соответственно, определяются относительные деформации бетонной ветви на уровне центра тяжести армирующих элементов A_{s2}, A_{ad2} . Для A_{s2} - $\varepsilon_{bt,2}(x) = \varepsilon_{s2}(x) - g'_{s2}(x)$, для A_{ad2} - $\varepsilon_{bt,ad2}(x) = \varepsilon_{ad2}(x) - g'_{ad2}(x)$. Кривизна бетонной ветви $\rho^{-1}(x)$ рассчитывается по различным формулам. Вид зависимостей для определения кривизны бетонной ветви (и всего армированного стержня в целом) $\rho^{-1}(x) = f(\varepsilon_{bt,ad2}; N = N_{s2} + N_{ad2})$ зависит от наличия неупругих деформаций в сжатой и растянутой зонах, а также трещин.

На основании данных о кривизне $\rho^{-1}(x)$, усилиях в арматурных ветвях: N_{s2}, N_{ad2} определяется положение нейтральной оси x , жесткость бетонной ветви при изгибе $B(\rho^{-1})$, что позволит оценить прогибы и углы поворота сечений железобетонного элемента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов Р.Н.* Аналитическая диаграмма «Момент-кривизна» при разгрузке и повторном нагружении армированного стержня / Р.Н. Зубов, Г.П. Яковленко // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. 1991. №7. С.3-5.

УДК 621.396.96

А. В. Белобородов, Д. Г. Митюшов, Д. А. Романов

**АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ТРАЕКТОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ
ЦЕЛИ В УСЛОВИЯХ НЕГАУССОВОЙ СТАТИСТИКИ
ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ**

Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны
Россия, г. Ярославль, e-mail: yavvu_umo@mil.ru

Статья посвящена синтезу алгоритма оценивания траекторных параметров целей в условиях негауссовой статистики помех и наличия аномальных измерений. При синтезе используется допущение о том, что плотность распределения вероятностей оценок экстраполяции может быть аппроксимирована гауссовской плотностью.

Ключевые слова: вторичная обработка, траекторные параметры, алгоритм, негауссова статистика помех, аномальные измерения.

A. V. Beloborodov, D. G. Mityushov, D. A. Romanov

*Yaroslavl Higher Military School of the Air Defense
Russia, Yaroslavl, e-mail: yavvu_umo@mil.ru*

**AN ALGORITHM FOR ESTIMATING TARGET TRAJECTORY
PARAMETERS UNDER NON-GAUSSIAN NOISE STATISTICS**

The paper is devoted to the development trajectory parameters estimation algorithm goals in a non-Gaussian noise statistics and the presence of abnormal measurements. In the synthesis using the assumption that the probability density function estimations extrapolation can be approximated by a Gaussian density.

Keywords: secondary processing, trajectory parameters of the algorithm, non-Gaussian noise statistics, abnormal measurement.

Анализ основных направлений развития средств воздушного нападения вероятного противника и способов их боевого применения показывает, что при нанесении ударов по обороняемым объектам и группировкам ПВО противник будет использовать тактику массированного применения авиации, крылатых и аэродинамических ракет различных типов, прорывающихся к объектам ударов в плотных боевых порядках, с широким использованием маневров, массированным применением помех и запуском ложных целей. Это приведет к существенному перенасыщению зон ответ-

ственности информационных средств объектами отражения сигналов. В этих условиях расстояние между соседними объектами становятся соизмеримыми с разрешающими способностями средств разведки, в результате чего, области появления сигналов от соседних объектов соприкасаются и перекрываются. При этом выборка векторов измерений по обнаруженным отметкам, получается на интервале времени накопления, становится смешанной. К тому же, вследствие плотности боевых порядков авиации противника, статистика шумов измерений становится отличной от гауссовской, а неоднозначность измерений и наличие аппаратурных погрешностей может привести к аномальным измерениям. Поэтому необходимость в разработке алгоритма, оценивания траекторных параметров цели в условиях негауссовой статистики помех и наличия аномальных измерений возрастает.

Для синтеза квазиоптимального алгоритма оценивания траекторных параметров цели в условиях негауссовой статистики помех и наличия аномальных измерений воспользуемся подходом, приводящим к вычислению частных оценок с помощью фильтра Калмана [1].

Предположим, что плотность распределения вектора ошибок измерений $\omega(\Delta z_k)$ неизвестна и отличается от гауссовской, а уравнение траектории движения цели и модель измерений заданы формулами [2]:

$$r_k = \Phi_{k/k-1} r_{k-1} + G_{k/k-1} W_k, \quad (1)$$

$$z_k = H r_k + \Delta z_k, \quad (2)$$

где r_k – n -мерный вектор траекторных параметров в момент времени t_k ;

$\Phi_{k/k-1}$ – переходная матрица, устанавливающая однозначную связь между значениями вектора траекторных параметров в двух соседних тактах измерений ($n \times n$);

W_k – p -мерный случайный вектор шумов возмущений траектории с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $E\{W_k W_k^T\}$;

$G_{k/k-1}$ – переходная матрица шумов возмущений ($n \times p$);

z_k – m -мерный вектор измерений, полученный в момент времени t_k

H – матрица соответствия между измеряемыми и оцениваемыми параметрами ($m \times n$); Δz_k – m -мерный случайный вектор гауссовских шумов измерений в момент времени t_k с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей

$$z_k = Hr_k + \sum_{l=1}^N \gamma_l^k m_l + \delta_k, \quad (3)$$

где δ_k - случайный гауссовский вектор с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей Ξ_k ; γ_l^k - параметрическая переменная, принимающая значение 1 с вероятностью q_l и 0, с вероятностью $1 - q_l$, причем для каждой координаты

$$\sum_{l=1}^N \gamma_l^k = 1.$$

В этом случае искомые оценки траекторных параметров и корреляционные матрицы ошибок оценивания будут определяться по следующим формулам:

$$\hat{r}_k = \sum_{l=-M}^M \hat{r}_k^{(l)} P(\gamma_l^k = 1 / Z^k); \quad (4)$$

$$\Psi_k = \sum_{l=-M}^M P(\gamma_l^k = 1 / Z^k) [\Psi_{lk} + (\hat{r}_k^{(l)} - \hat{r}_k)^T (\hat{r}_k^{(l)} - \hat{r}_k)], \quad (5)$$

где $\hat{r}_k^{(l)}$ - частная оценка вектора траекторных параметров, полученная при условии, что на k - м шаге в выражении для модели траектории движения маневрирующей цели $\gamma_l^k = 1$; Ψ_{lk} - корреляционная матрица ошибок частных оценок; $P(\gamma_l^k = 1 / Z^k)$ - условная вероятность реализации $\gamma_l^k = 1$.

А условную плотность распределения $\omega(r_k / Z^k, \gamma_l^k = 1)$ можно определить как

$$\omega(r_k / Z^k, \gamma_l^k = 1) = \frac{\omega(z_k / \gamma_l^k = 1, r_k) \omega(\hat{r}_k / Z^{k-1})}{\omega(z_k / Z^{k-1}, \gamma_l^k = 1)}; l = \overline{1, N}, \quad (6)$$

$$\omega(z_k / \gamma_l^k = 1, r_k) = N \left\{ Hr_k + m_l, \Xi_k \right\}. \quad (7)$$

Рассмотрим плотность распределения экстраполированной оценки вектора траекторных параметров $\omega(\hat{r}_k / Z^{k-1})$.

С учетом аппроксимации плотности распределения вектора ошибок измерений полигауссовым распределением [3],

$$\left| \omega(\Delta z_k) - \sum_{l=1}^N q_l \omega_l(\Delta z_k) \right| < \varepsilon, \quad (8)$$

$$\left| 1 - \sum_{l=1}^N q_l \right| < \varepsilon,$$

где $\omega_l(\Delta z_k)$ – аппроксимирующие гауссовские распределения с математическими ожиданиями $m_l, l = \overline{1, N}$ и корреляционными матрицами Ξ_k .

Эти ошибки можно разбить на N групп, имеющих гауссово распределение с математическим ожиданием $m_l, l = \overline{1, N}$ и корреляционной матрицей Ξ_k .

Следовательно, на каждом шаге на вектор ошибок измерений действует только одна из составляющих полигауссового распределения аппроксимирующего плотность распределения ошибок измерений. Тогда с учетом линейности уравнений (1) и (2) плотность распределения экстраполированных оценок можно представить как взвешенную сумму условных гауссовых плотностей [4].

$$\omega(r_k / Z^{k-1}) = \sum_{l=1}^N \omega(\hat{r}_k / Z^{k-1}, \gamma_l^k = 1) P(\gamma_l^k = 1 / Z^{k-1}),$$

где $\omega(\hat{r}_k / Z^{k-1}, \gamma_l^k = 1)$ - условная плотность распределения экстраполированных оценок, полученная при условии, что на k -м шаге вектор ошибок измерений будет принадлежать к l -й группе, $l = \overline{1, N}$; $P(\gamma_l^k = 1 / Z^{k-1})$ – апостериорная вероятность этой реализации.

Так как измерения между собой не коррелированы, а условные плотности распределения $\omega(\hat{r}_k / Z^{k-1}, \gamma_l^k = 1), l = \overline{1, N}$ независимы то, на основании центральной предельной теоремы [5], при $N \rightarrow \infty$ плотность распределения экстраполированных оценок $\omega(r_k / Z^{k-1})$ можно считать гауссовской с параметрами

$$\omega(r_k / Z^{k-1}) = N\{\hat{r}_{k3}, \Xi_k\}. \quad (9)$$

Для определения вида и параметров распределения стоящего в знаменателе выражения (6) воспользуемся уравнением движения цели и моделью измерений

$$\omega(\hat{r}_k / Z^k) = \sum_{l=1}^N C_l N\{Hr_k + m_l, \Xi_k\}, \quad (10)$$

где

$$C_l = \frac{N\{\Phi_{k/k-1}\hat{r}_{k-1}, \Phi_{k/k-1}\Psi_{k-1}\Phi_{k/k-1}^T\}}{\sum_{l=1}^N \alpha_l N\{H\Phi_{k/k-1}\hat{r}_{k-1}, H\Phi_{k/k-1}\Psi_{k-1}\Phi_{k/k-1}^T H^T + \Xi_k\}}.$$

Учитывая, что векторы шумов измерений не коррелированы, имеем

$$E\{z_k / \gamma_l^k = 1, Z^{k-1}\} = E\left\{ (Hr_k + \sum_{l=1}^N \gamma_l^k m_l + \delta_k) / \gamma_l^k = 1, Z^{k-1} \right\} = H\hat{r}_{k3} + m_l; l = \overline{1, N}; \quad (11)$$

$$E\{(z_k - H\hat{r}_{k3} - m_l)^T (z_k - H\hat{r}_{k3} - m_l) / \gamma_l^k = 1, Z^{k-1}\} = H\Psi_{k3}H^T + \Xi_k; l = \overline{1, N}. \quad (12)$$

Тогда плотность распределения $\omega(z_k / \gamma_l^k = 1, Z^{k-1})$ окончательно определяется формулой

$$\omega(z_k / \gamma_l^k = 1, Z^{k-1}) = N\{H\hat{r}_{k3} + m_l, H\Psi_{k3}H^T + \Xi_k\}. \quad (13)$$

Учитывая гауссовость распределений, входящих в выражение (7), условная плотность распределения, $\omega(\hat{r}_k / Z^k, \gamma_l^k = 1)$ является гауссовской с вектором математического ожидания $\hat{r}_k^{(l)}$ и корреляционной матрицей Ψ_{lk} [1]. Поэтому частные оценки вектора траекторных параметров и их корреляционные матрицы могут быть вычислены по формулам фильтра Калмана [6]:

$$\begin{aligned} \hat{r}_k^{(l)} &= \hat{r}_{k3} + K_k (z_k - H\hat{r}_{k3} - m_l); l = \overline{1, N}; \\ \Psi_{lk} &= [I - K_k H] \Psi_{k3}; l = \overline{1, N}; \\ K_k &= \Psi_{k3} H^T [H\Psi_{k3}H^T + \Xi_k]^{-1}; l = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (14)$$

Вычисление весовых коэффициентов $P(\gamma_l^k = 1 / Z^k); l = \overline{1, N}$, представляющих собой апостериорные вероятности реализации $\gamma_l^k = 1; l = \overline{1, N}$, проведем с учетом различных моделей эволюции q_l , характеризующей частоту изменения параметрической переменной $\gamma(k)$ [4].

Пусть на интервале наблюдения $q_l, l = \overline{1, N}$ имеет постоянное значение. Тогда величина $\gamma(k)$ определяется выражением

$$\gamma_l^k = \begin{cases} 1 \text{ с вероятностью } q_l; \\ 0 \text{ с вероятностью } 1 - q_l; \end{cases} l = \overline{-M, M}, \quad (15)$$

где

$$\sum_{l=-M}^M q_l = 1; \sum_{l=-M}^M \gamma_l^k = 1.$$

Тогда подставляя выражение для плотности распределения (3) в формулу для вычисления апостериорных вероятностей

$$P(\gamma_l^k = 1/Z^k) = \frac{\omega(z_k / \gamma_l^k = 1, Z^{k-1})P(\gamma_l^{k-1} = 1/Z^{k-1})}{\sum_{l=-M}^M \omega(z_k / \gamma_l^k = 1, Z^{k-1})P(\gamma_l^{k-1} = 1/Z^{k-1})}; l = \overline{-M, M}, \quad (16)$$

получаем

$$P(\gamma_l^k = 1/Z^k) = \frac{N\{H_{k3}^{(l)} + m_l, H\Psi_{k3}H^T + \Xi_k\}P(\gamma_l^{k-1} = 1/Z^{k-1})}{\sum_{l=1}^N N\{H_{k3} + m_l, H\Psi_{k3}H^T + \Xi_k\}P(\gamma_l^{k-1} = 1/Z^{k-1})}; l = \overline{1, N}. \quad (17)$$

В случае использования модели измерения $q_l, q_l, l = \overline{1, N}$ как независимой на интервале наблюдения величины апостериорные вероятности $P(\gamma_l^k = 1/Z^k)$ определяются на основании формулы

$$P(\gamma_l^k = 1/Z^k) = \frac{\omega(z_k / \gamma_l^k = 1, Z^{k-1})P(\gamma_l^{k-1} = 1/Z^{k-1})}{\sum_{l=-M}^M \omega(z_k / \gamma_l^k = 1, Z^{k-1})P(\gamma_l^{k-1} = 1/Z^{k-1})}; l = \overline{-M, M}. \quad (18)$$

Подставляя в нее выражение (13), получаем

$$P(\gamma_l^k = 1/Z^k) = \frac{N\{H_{k3} + m_l, H\Psi_{k3}H^T + \Xi_k\}q_l^k}{\sum_{l=1}^N N\{H_{k3} + m_l, H\Psi_{k3}H^T + \Xi_k\}q_l^k}; l = \overline{1, N}. \quad (19)$$

Исследование эффективности и устойчивости квазиоптимального алгоритма оценивания траекторных параметров целей в условиях негауссовой статистики помех и наличия аномальных измерений проводилась методом статистического моделирования в различных помеховых ситуациях. В качестве используемых для исследования плотностей распределения ошибок измерений формировались: гауссовская с единичной дисперсией и математическим ожиданием +1 км; «усеченная» гауссовская, а также аналогичные распределения Стьюдента с тремя степенями свободы (несмещенное, смещенное со смещением +1 км и «усеченное»). Усеченная гауссовская плотность распределения ошибок измерений формировалась из обычной гауссовской плотности с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией введением ограничения $\xi \geq -0,5 \text{ км}$, где ξ - гауссовская случайная величина. Аналогичным образом формировалось «усеченное» распределение Стьюдента ($t \geq -0,5 \text{ км}$, где t - Стьюдентова случайная величина).

Формирование случайных величин, распределенных по Стьюденту с тремя степенями свободы, производилось по формуле [7]

$$t = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{k}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_k^2)}},$$

где $\xi_i, i = \overline{0,1}$ – независимые, нормально распределенные случайные величины.

Статистические характеристики разработанного алгоритма вычислялись по результатам оценивания одной координаты вектора траекторных параметров цели в условиях выбранных распределений шумов измерений. Траектории движения целей полагаются известными.

Для анализа эффективности и устойчивости разработанного алгоритма оценивания, а также его сравнения с существующим способом обработки – фильтром Калмана выбраны зависимости суммарного отклонения оценок траекторных параметров от их истинного значения.

На рис. 1 представлены зависимости S_{Σ} от объема выборки измерений k , полученные для «смещенного» и «усеченного» гауссовских распределений, а также рассматриваемых видов распределения Стьюдента с тремя степенями свободы соответственно.

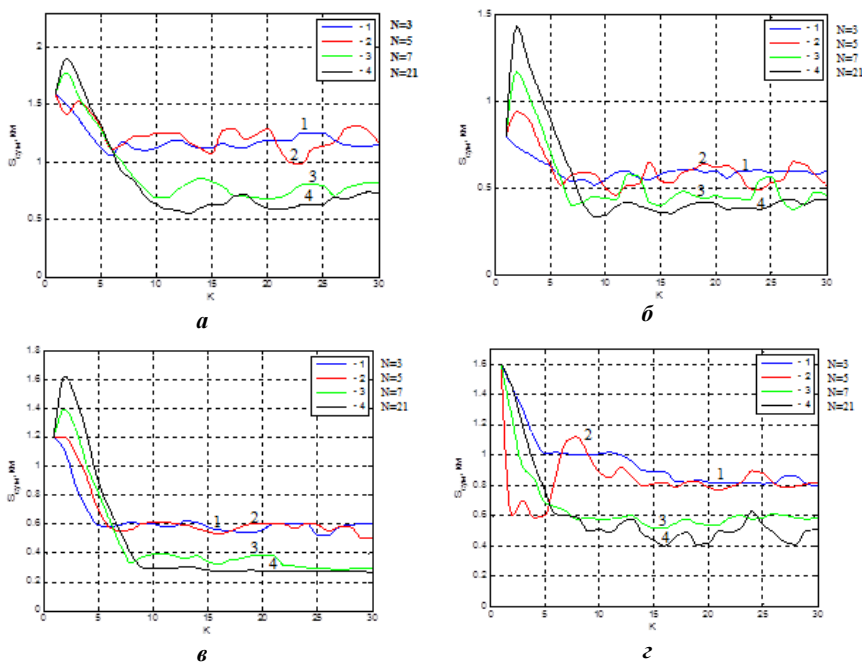


Рис. 1. Зависимость суммарной ошибки от объема выборки

Анализ представленных зависимостей позволяет сделать вывод, что исследуемый алгоритм позволяет во всех случаях получать состоятельные оценки вектор траекторных параметров цели, т.к. их точности с течением времени возрастают. При этом во всех рассмотренных случаях точность получаемых оценок при $N \geq 5$ превосходит точности оценок, получаемых в результате калмановской фильтрации. Наибольший выигрыш достигается в условиях смещенных распределений ошибок измерений (рис. 1, *a–в*). Это объясняется тем, что в случае калмановской фильтрации априорная плотность распределения ошибок измерений имеет гауссово распределение и нулевое смещение [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Туров В.Е.* Модель аномальных и негауссовых ошибок измерений / В.Е. Туров, А.В. Белобородов, Л.В. Белобородов // Сб. материалов 41-й военно-науч. конф. ВА ВКО. 2011. № 8. С.42-49.
2. *Кузьмин С.З.* Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации. М.: Радио и связь, 1986. 352 с.
3. *Lainiotis D.G.* Performans measure for adaptiuekalman estimator / D.G. Lainiotis, F.L. Sims // IEEE Trans, AC – 15. 1970. № 2. P. 249-250.
4. *Белобородов А.В.* Алгоритм оценивания траекторных параметров цели в условиях негауссовой статистики помех и наличия аномальных измерений / А.В. Белобородов, В.Е. Туров // Всерос. науч.-техн. конф. «Перспективы развития РЛС дальнего обнаружения и интегрированных систем и комплексов информационного обеспечения Военно-космической обороны (РТИ Системы ВКО - 2013)»: сб. материалов. М.: Вега–Инфо, 2013. С. 161-171.
5. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1979. 495 с.
6. *Кузьмин С.З.* Основы теории цифровой обработки информации. М.: Сов. радио, 1974. 432 с.
7. *Боровков А.А.* Математическая статистика. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1984. 472 с.

УДК 537.6

В. С. Вечфинский, С. С. Соловьева

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П.А Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: vladvech@yandex.ru, swets27@mail.ru

НАВЕДЕННАЯ МАГНИТНАЯ АНИЗОТРОПИЯ И НАКЛЕП КОНСТРУКЦИОННЫХ СТАЛЕЙ

При хранении на заводах в условиях действия магнитного поля Земли в стальных изделиях может возникать наведенная магнитная анизотропия (НМА). НМА зависит от механического давления, действовавшего на материал. Показано, что по свойствам НМА можно определять степень наклепа конструкционных сталей.

Ключевые слова: механическая обработка, наклеп, ферромагнетик, сталь, наведенная магнитная анизотропия.

V. S. Vechfinsky, S. S. Soloveva

*P.A.Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: vladvech@yandex.ru, swets27@mail.ru*

INDUCED MAGNETIC ANISOTROPY AND MECHANICAL PROCESSING FOR STEEL

When stored is steel products under the influence of the Earth's magnetic field, induced magnetic anisotropy (IMA) can occur. IMA depend on the pressure which act on ferromagnetic materials. We show what by properties of IMA it is possible to determine the degree of mechanical processing for steels.

Keywords: Mechanical processing, ferromagnetic, steel, induced magnetic anisotropy, magnetic field.

В 20-х годах прошлого века на сплавах никеля и кобальта, подвергнутых нагреву и охлаждению в нулевом магнитном поле наблюдались перетянутые петли магнитного гистерезиса. Перетяжка на петлях гистерезиса намагниченности наблюдалась в районе нулевого магнитного поля. На ферритах состава $Fe_{3-x}Co_xO_4$ подобные петли впервые наблюдали Като и Такеи в тридцатые годы. Теоретическое обоснование этого эффекта появилось позже в работах Нееля (1954), Танигучи (1954, 1955) и других. Об этих работах и о многих других подробно написано в фундаментальной

монографии С. Крупички «Физика ферритов и родственных им магнитных окислов», опубликованной еще в 1976 году [1].

Перетяжка в районе нулевого магнитного поля обусловлена зависимостью (или слабой зависимостью) начальной магнитной восприимчивости от намагничивающего поля. Этот эффект, названный перминвар-эффектом, вызывается диффузионной стабилизацией доменных границ (ДГ). В результате этой стабилизации на пути движения ДГ образуются так называемые «гигантские» потенциальные барьеры. Иначе говоря, доменная граница попадает в потенциальную энергетическую яму и в ферромагнетиках возникает наведенная магнитная анизотропия (НМА). Преодолевая «гигантские» энергетические барьеры ДГ движется большими скачками Баркгаузена.

Наши исследования показали, что в результате охлаждения образцов некоторых ферромагнетиков и ферромагнетиков в постоянном магнитном поле (H_T) от температур T_X меньших, чем температура Кюри (T_C), до комнатной (T_K) на частных петлях гистерезиса намагниченности этих образцов могут возникать необычные перетяжки. Эти перетяжки наблюдаются при значении намагничивающего поля близкого и равного по напряженности полю H_T . При последующем нагреве образцов от комнатной температуры перетяжка исчезает при температуре T_X . Таким образом, магнитная структура некоторых ферромагнитных материалов, сложившаяся в результате нагрева и охлаждения в магнитном поле, может фиксировать и хранить информацию о напряженности магнитного поля и температуре, до которой нагревался ферромагнетик. В данном случае возникает особый вид наведенной магнитной анизотропии. Данный вид НМА может возникать и без нагрева при выдержке магнитного материала в постоянном и даже в переменном магнитном поле [4]. То есть при выдержке при температурах от 30 °С и ниже, вплоть до отрицательных температур.

Первоначально эти эффекты были обнаружены на горных породах, содержащих ферромагнитные минералы [4]. Это связано с тем, что в геофизике давно проводятся палеомагнитные исследования. То есть исследования магнитного поля Земли в различные периоды до десятков и даже сотен миллионов лет назад. Между прочим, палеомагнитные исследования в прошлом веке способствовали рождению тектоники плит и позволили реконструировать единый «праматерик» – Пангею. Особую сложность представляет собой не столько реконструкция движения магнитных полюсов Земли и их инверсии, а измерение напряженности магнитного поля. В разработке методов определения палеонапряженности свойства нового вида НМА стоят на особом месте [4].

Следует особо подчеркнуть, что эффекты магнитной памяти, связанные с данным видом НМА, малы и не обнаруживаются при обычных измерениях петли гистерезиса. Разработан специальный метод измерения

слабых искажений частных петель гистерезиса, который базируется на стандартном компенсационном методе. Согласно этому методу измеряются так называемые скомпенсированные петли гистерезиса намагниченности [2-5]. Сигнал ЭДС, образующий дифференциальную петлю гистерезиса можно разложить на составляющие его гармоники и исследовать поведение этих гармоник в зависимости от того, какие факторы действовали на материал при создании в нем НМА. Особенно чутко реагируют на данные эффекты памяти третья и пятая гармоники ЭДС [4, 5].

Исследования показали: если создавать НМА в материалах, находящихся под механическим давлением, то величина эффектов НМА, а следовательно, и величина потенциальных барьеров, их вызывающих, сильно зависит от величины этого давления [6].

Ранее был разработан аппаратно-программный комплекс для исследования свойств НМА ферромагнетиков [5, 7]. Комплекс был разработан с использованием предложенных физико-математических моделей эффектов НМА [8]. В последние годы исследование эффектов НМА производилось на материалах заводского производства, обладающих магнитными свойствами. Это стали марки ст. 40Х, ст. 45, ст. 65Г. Они используются в авиационной промышленности при изготовлении прутков для лопаток авиационных двигателей. Хотя в промышленности лопатки считаются немагнитными, но мы смогли уловить магнитный отклик. Повторяем: первоначально НМА были открыты на горных и даже осадочных породах, которые с точки зрения промышленности не магнитны.

В авиационной промышленности также одной из важных задач является контроль степени наклепа ферромагнитных изделий, изготовленных из конструкционных сталей. Существует ряд экспериментальных работ, посвященных изучению возможности неразрушающего контроля степени поверхностного упрочнения магнитными методами. Например, в работе [9] опубликованы результаты исследования зависимости величины магнитных шумов от степени упрочнения для образцов из марки стали 30ХГСА. Магнитные шумы обусловлены скачками Баркгаузена. Шумы уменьшаются с увеличением упрочнения.

Наличие большого числа влияющих факторов при измерении магнитных шумов (свойства исходных материалов, способы и методика упрочнения, аппаратура контроля, отсутствие приемлемой физической модели) не позволяет объективно сравнить во многом противоречивые результаты. Помимо этого, число скачков Баркгаузена, их величина не поддается точному контролю и носит случайный характер.

Целью настоящих исследований является изучение зависимости степени наклепа от эффектов памяти наведенной магнитной анизотропии. Скачки Баркгаузена, обуславливающие НМА, имеют преимущества. Во-

первых, они значительно больше (как минимум на порядок [3, 4, 8]), и сигнал ЭДС от них лучше регистрируется. Во-вторых, они строго локализованы и объединяются в группы.

Надо учесть следующее. Практически все операции в заводских условиях проводятся в магнитном поле Земли. Обычно относительно слабое геомагнитное поле не принимается в расчет. Однако этого поля вполне достаточно, чтобы создавать в магнитном материале НМА [3, 4].

В этой статье приведены данные контроля степени наклепа на примере образцов из конструкционной стали марки 65Г.

В состав стали 65Г входят: кремний – 0,17-0,37 %, медь – не более 0,2%, марганец – 0,9-1,2 %, никель – не более 0,25 %, фосфор – не более 0,035 %, хром – не более 0,25 %, сера – не более 0,035 %.

Упрочнение плоских образцов из стали 65Г осуществляли дробеструйным методом поверхностно-пластического деформирования (ППД) при давлении воздуха от 0,3 до 0,6 МПа стеклошариками и стальными шариками в течение времени $t = 1$ мин. Измерение эффектов памяти наведенной магнитной анизотропии осуществляли при воздействии переменного синусоидального магнитного поля с амплитудой до 120 А/м. Измеряемой величиной является сигнал вторичной ЭДС ($\varepsilon = f(t)$), поступающий от образца при его намагничивании переменным полем. В данном случае для перенамагничивания использовалось переменное синусоидальное магнитное поле с частотой 80 Гц. Использование такой частоты обусловлено тем, что (в силу высокой проводимости) при более высоких частотах магнитного поля в образце могут возникнуть вихревые токи, которые исказят результаты эксперимента. Эксперименты проводились при температуре 25 °С.

Ранее было показано [3, 4], что наиболее четко на эффекты памяти наведенной магнитной анизотропии реагируют третья и особенно пятая гармоники сигнала вторичной ЭДС, поэтому в качестве исследуемого параметра было выбрано отношение амплитуд этих гармоник A_3/A_5 . Так как третья и пятая гармоники реагируют на НМА в противофазе, то отношение их амплитуд ярче отражает некоторые свойства НМА. Результаты зависимости $F(h) = A_3/A_5$ от амплитуды h , переменного магнитного поля для одного из плоских образцов из марки стали 65Г до наклепа и после него (при давлении $P = 0,3$ МПа) представлены на рис. 1. На графиках отчетливо видно, что амплитуда локального максимума наблюдаемого в области 60 А/м, характерная для исходного не упрочненного состояния образца, существенно уменьшается после осуществления его упрочнения. А для «перенаклепленного» (при давлении 0,6 МПа) образца этот локальный максимум и вовсе становится минимумом.

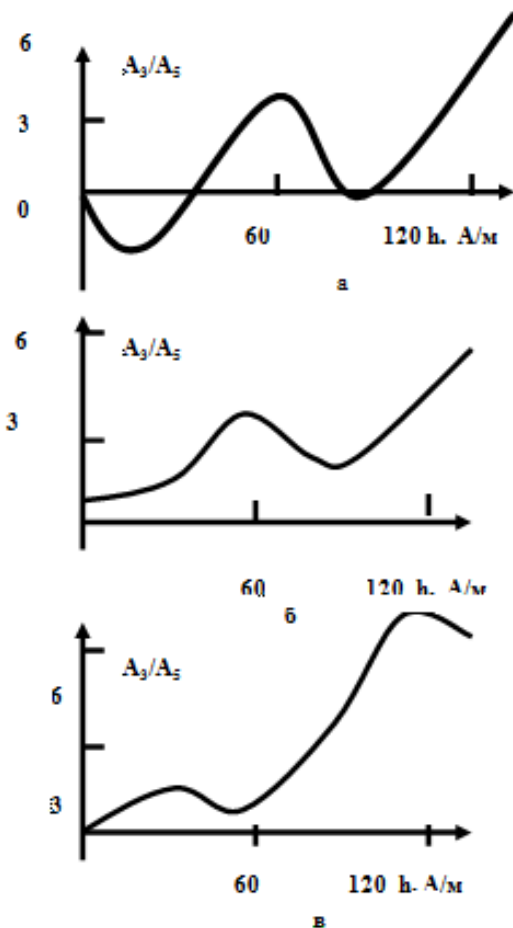


Рис. 1. Зависимость $F(h) = A_3/A_5$ от амплитуды h переменного магнитного поля для одного из плоских образцов из марки стали 65Г до наклепа и после него (при давлении $P = 0,3$ МПа):
 а – до упрочнения; б – после упрочнения при давлении 0,3 МПа;
 в – после упрочнения при давлении 0,6 МПа

Первоначальный локальный максимум обусловлен ранее возникшей в образце в геомагнитном поле НМА. В наших широтах напряженность геомагнитного поля равна примерно 60 А/м. Под воздействием дробеструйной обработки, эффекты НМА уменьшаются. В работе [5] также гово-

рится, что после воздействия на ферромагнетик механического давления НМА уменьшается

На каждом образце измерения проводились не менее 10 раз, полученные экспериментальные данные усреднялись. По усредненным результатам получена общая зависимость величины отношения A_3/A_5 от величины давления P . Для того чтобы ярче выделить область, соответствующую норме, мы продифференцировали зависимости A_3/A_5 по P . Результат дифференцирования представлен на рис. 2. Нормальный наклеп в данном случае получается при давлениях 0,35-0,55 МПа. До этих величин происходит недонаклеп, а выше – перенаклеп. Измерение степени наклепа исследуемых образцов было выполнено на установке ПМТЗ.

Из графика видно, что нормальному наклепу соответствует область резкого падения производной $d(A_3/A_5)/dP$. Все графики строились путем компьютерной интерполяции результатов.

Контрольное измерение степени наклепа исследуемых образцов было выполнено на установке ПМТЗ.

Из экспериментов следует, что при нормальной степени наклепа данной марки стали, само отношение A_3/A_5 лежит в пределах 1–2.

По результатам данных исследований мы можем предложить новый способ определения степени наклепа конструкционных сталей. Естественно, что этот способ нуждается в экспериментальных исследованиях на образцах сталей различных марок.

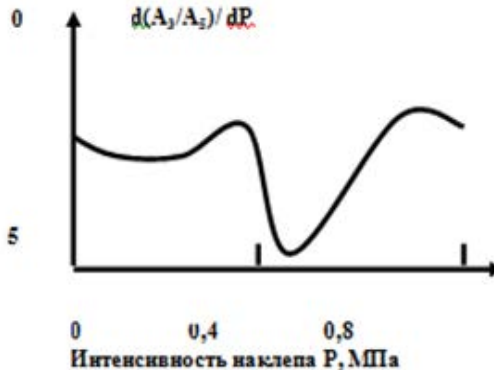


Рис. 2. Зависимость производной $\frac{d(A_3/A_5)}{dP}$ от интенсивности наклепа после упрочнения от режимов обработки дробеструйным методом ППД

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крупичка С.* Физика ферритов и родственных им магнитных окислов. М.: Мир. 1976. Т.2. 504 с.
2. *Вечфинский В.С.* Использование перминвар-эффекта термонамагниченных пород при определении палеонапряженности / В.С. Вечфинский, Ю.К. Виноградов, А.О. Мострюков // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. №3. С. 63-69.
3. *Соловьева С.С.* Магнитная память ферромагнитных материалов // Заготовительное производство в машиностроении. 2009. №8. С. 47–51.
4. *Вечфинский В.С.* Магнитотекстурная память горных пород: дис. ... д-ра физ.-мат. наук СПб: Санкт-Петербург. гос. ун-т, 1992. 213 с.
5. Аппаратный комплекс для исследования эффектов наведенной магнитной анизотропии / В.С. Вечфинский, Д.А. Ларионов, С.В. Гагаркин [и др.] // Датчики и системы. 2001. № 12. С.37-40.
6. Влияние давления на наведенную магнитную анизотропию горных пород / А.Н. Ершов, В.С. Вечфинский, Д.А. Ларионов [и др.] // Изв. РАН. Физика Земли. – 1999. № 4. С. 75-80.
7. *Vetchfinski V. S.* Program complex for investigation the rocks' magnetic memory / V.S. Vetchfinski, S.S. Solovyeva, S.I. Fedin // Book of Abstracts International Conference on Problems of Geocosmos, St. Petersburg, 2006. P. 107-108.
8. *Вечфинский В.С.* Физико-математическая модель перетянутых петель гистерезиса магнетитсодержащих пород / В.С. Вечфинский, А.Н. Ершов, М.Г. Юмагулов // Изв. РАН. Физика Земли. 1999. № 5. С. 83–88.
9. *Ломаяв Г. В.* Исследование метода эффекта Баркгаузена и его применение в измерениях, автоматике и контроле материалов и окружающей среды: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Ижевск, 1998. 350 с.

УДК 66.048.05.004.6

Г. Г. Вилков

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vilkovgg@ystu.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕКТИФИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Приведены примеры использования системно-информационного подхода для решения практических задач проектирования оптимальных ректификационных систем и оптимального управления ими.

Ключевые слова: ректификационная система, газоразделение, информационный критерий относительной организованности, условие оптимальности, проектирование оптимальных ректификационных систем, оптимальное управление ректификационными системами.

G. G. Vilkov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vilkovgg@ystu.ru

OPTIMIZATION OF RECTIFICATION SYSTEMS

We give examples of application of the system-information approach to solve practical problems of designing optimal rectification systems and of their optimal control.

Keywords: *rectification system, gas-separation, information criterion of relative organization, optimality condition, design of optimal rectification systems, optimal control of rectification systems.*

В [1] изложены теоретические основы системно-информационного анализа разделительных химико-технологических систем (РХТС). Результаты анализа показывают, что задачу оптимизации РХТС можно разбить на два этапа. Первый этап – декомпозиция РХТС на оптимальные подсистемы – поиск оптимальных значений расходов материальных потоков и концентраций компонентов в них каждой разделительной подсистемы (технологического аппарата), обеспечивающих оптимальность РХТС в целом. Второй этап – оптимизация отдельных разделительных подсистем при условии выполнения результатов декомпозиции как ограничений. Первому этапу может предшествовать определение оптимальной структуры РХТС, второй этап может завершаться разработкой системы оптимального управления РХТС.

В результате решения задачи декомпозиции можно получить условия оптимальности, которые отражают взаимосвязь между веществом, энергией и информацией в оптимально организованных РХТС. Их можно разделить на две группы. Первая группа – условия оптимальности, полученные при максимизации информационного критерия относительной организованности РХТС по интенсивным управлениям. Из общего безусловно относительного смысла понятия оптимальности они вычлениют долю абсолютной оптимальности как следствие интенсивных воздействий на РХТС – подвода информации (порядка) при неизменном количестве вещества и энергии. Эти условия оптимальности не зависят от применяемого критерия оптимальности и поэтому должны использоваться при проектировании оптимальных РХТС и при оптимальном управлении ими. Во вторую группу входят условия оптимальности, полученные в результате минимизации информационного критерия относительной организованности РХТС по экстенсивным управлениям при соответствующих связях и огра-

ничениях. Они отражают относительный смысл понятия оптимальности как следствие экстенсивных воздействий на РХТС и разрешение компромисса между веществом и энергией. Вид этих условий оптимальности в общем случае зависит от применяемого критерия оптимальности.

Предложенная многоуровневая процедура оптимизации РХТС позволяет получить количественные результаты оптимизации значительно проще, чем традиционная одноуровневая.

Далее рассматриваются примеры использования системно-информационного подхода для решения практических задач оптимизации многоколонных ректификационных систем. Во всех примерах применена концепция четкого разделения, когда количество компонентов, одновременно распределяющихся между дистиллятом и кубовым продуктом каждой колонны, не более двух.

Информационный критерий, оценивающий относительную организованность рассматриваемых ректификационных систем, имеет следующий вид

$$\eta = (H_{\text{вх}} - H_{\text{вых}}) / H_{\text{вх}} = \left(\sum_{i=1}^m z_i \ln z_i - \sum_{r=1}^{n+1} \varepsilon_r^0 \sum_1^{p_r} x_{ir} \ln x_{ir} \right) / \sum_{i=1}^m z_i \ln z_i, \quad (1)$$

где $H_{\text{вх}}$ и $H_{\text{вых}}$ – информационные энтропии входного и выходных потоков ректификационной системы; ε_r^0 – отбор выходного потока r , отнесенный к единице сырья системы (доля отбора); z_i, x_{ir} – мольные концентрации i -го компонента в сырье и выходном потоке r системы; m – количество компонентов в сырье; n – количество колонн в системе; p_r – количество компонентов в выходном потоке r системы.

Постановка задачи декомпозиции ректификационной системы на оптимальные подсистемы заключается в максимизации критерия (1) по интенсивным управлениям и минимизации его по экстенсивным управлениям при выполнении ограничений на качество товарных фракций и связях (уравнения общего и покомпонентного материальных балансов колонн) [2, 3].

Максимум этого критерия достигается при значениях интенсивных управлений каждой ректификационной колонны, определяемых из соотношений [3, 4]

$$\varepsilon = D/F = \sum_{i=1}^k z_i \quad \text{и} \quad 1 - \varepsilon = W/F = \sum_{i=k+1}^m z_i, \quad (2)$$

где ε – относительный отбор дистиллята колонны; D, W, F – мольные расходы дистиллята, кубового продукта и питания колонны; z_i – мольная концентрация i -го компонента в питании колонны; k – номер наиболее тяжё-

лого компонента, обогащаемого в дистиллят; m – количество компонентов в питании.

Минимизация критерия (1) приводит к появлению условий оптимальности типа

$$\text{ТПО} = 1, \quad (3)$$

где ТПО – термодинамический показатель оптимальности – комплекс варьируемых концентраций компонентов в выходных потоках системы. ТПО можно составить, не прибегая к минимизации критерия (1), а следуя формальным правилам [2].

В первом примере требуется решить задачу проектирования оптимальной газофракционирующей установки (ГФУ), предназначенной для разделения вторичных продуктов установок атмосферно-вакуумной трубчатки, платформинга и гидроочистки дизельного топлива. Разделяемое сырьё имеет следующий состав (концентрации в мольных долях): этан $z_1 = 0,0544$, пропан $z_2 = 0,1755$, изобутан $z_3 = 0,1215$, нормальный бутан $z_4 = 0,2260$, сумма пентанов и более тяжёлых компонентов $z_5 = 0,4226$. На установке необходимо выделить из сырья пропановую, изобутановую и бутановую фракции регламентного качества.

В задаче проектирования входит определение оптимальной структуры установки, поиск оптимальных значений величин расходов промежуточных и продуктовых потоков, концентраций компонентов в них, расчёт для каждой колонны флегмового числа, числа тарелок, оптимального места ввода питания. Кроме этого, требуется провести анализ результатов оптимизации установки оптимальной структуры и установки, рекомендуемой проектной организацией.

Определение оптимальной структуры установки проведено в соответствии с [3]. При отсутствии дополнительных требований пятикомпонентную смесь можно разделить на отдельные фракции на четырёх простых ректификационных колоннах. Существует 14 вариантов соединения этих колонн. Выбор наилучшего из них при простом переборе вариантов должен осуществляться в результате оптимизации конструктивных и режимных параметров колонн для каждого варианта с использованием экономических критериев оптимальности.

Для определения оптимального варианта соединения колонн был обоснован и сформулирован принцип дихотомии: максимальную организованность процессу разделения в ректификационной колонне обеспечивает такое разделение исходной смеси, при котором сумма мольных концентраций обогащаемых в дистиллят компонентов питания ближайшая к 0,5.

Принцип дихотомии соответствует известному выводу о том, что информационная энтропия выбора максимальна в случае равновероятных

событий. Кроме этого, в работе [5] показано, что деление смеси в колонне пополам отвечает минимуму необратимых затрат энергии на разделение.

Последовательно применяя принцип дихотомии на каждой ректификационной колонне, можно получить оптимальный вариант соединения колонн без перебора возможных вариантов.

Учитывая аддитивные свойства энтропии, в качестве критерия оценки оптимальности каждого варианта соединения колонн можно использовать сумму энтропий выбора отдельных колонн ректификационной системы [3]. При этом оптимальным является вариант, для которого суммарная энтропия выбора максимальна.

Для приведённого выше состава сырья ГФУ использование и принципа дихотомии, и суммарной энтропии дало одинаковый результат: оптимальная структура установки – вариант соединения колонн, изображённый на рис.1, а.

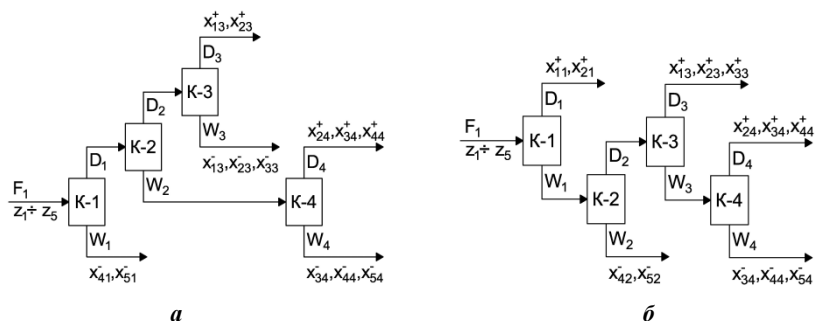


Рис. 1. Схемы газодифракционной установки:
 а – оптимальная структура; б – проектная структура

Предложенный проектной организацией вариант соединения колонн ГФУ (рис. 1, б) не является оптимальным. Расчеты показали, что по своей разделительной способности он находится лишь на 10 месте из 14 возможных вариантов.

Для дополнительного подтверждения этого вывода далее решены задачи оптимизации обеих ректификационных систем и проведено сравнение полученных результатов с использованием экономических критериев.

При декомпозиции ректификационной системы оптимальной структуры определены условия оптимальности

$$\epsilon_1^0 = 1 - z_5; \quad \epsilon_2^0 = z_1 + z_2; \quad \epsilon_3^0 = z_1; \quad \epsilon_4^0 = z_3; \quad \frac{x_{13}^+ \cdot x_{24}^+ \cdot x_{33}^- \cdot x_{41}^- \cdot x_{54}^-}{x_{13}^- \cdot x_{23}^+ \cdot x_{34}^- \cdot x_{44}^+ \cdot x_{51}^-} = 1, \quad (4)$$

где ε_j^0 – относительный расход дистиллята j -той колонны, $j = 1, \dots, 4$; x_{ij} – концентрация i -го компонента j -той колонны, $i = 1, \dots, 5$; индексы (+) и (-) относятся к концентрациям в дистилляте и кубовом продукте.

При декомпозиции ректификационной системы проектной структуры условия оптимальности имеют иной вид

$$\varepsilon_1^0 = z_1; \quad \varepsilon_2^0 = z_2 + z_3 + z_4; \quad \varepsilon_3^0 = z_2; \quad \varepsilon_4^0 = z_3; \quad \frac{x_{11}^+ \cdot x_{24}^+ \cdot x_{33}^+ \cdot x_{42}^- \cdot x_{54}^-}{x_{13}^+ \cdot x_{21}^- \cdot x_{34}^- \cdot x_{44}^+ \cdot x_{52}^-} = 1. \quad (5)$$

Решая систему уравнений, состоящую из условий оптимальности (4) и уравнений общего и покомпонентного материальных балансов, получаем оптимальные значения расходов материальных потоков отдельных колонн и концентраций компонентов в них ГФУ оптимальной структуры.

Аналогично, используя условия оптимальности (5), решается задача оптимизации ГФУ проектной структуры.

Полученные результаты выступают в качестве ограничений типа равенств при проектировании отдельных ректификационных колонн обеих установок. При этом использовались энтропийные математические модели колонн [3, 6] и методика расчета затрат на разделение, приведённая в [7].

Проведено сравнение результатов решения обеих оптимизационных задач, подтвердившее преимущество предложенного способа соединения ректификационных колонн ГФУ: снижение энергетических затрат на 18%, приведённых затрат на 14%.

В последующих примерах решаются задачи оптимального управления ректификационными системами.

Для оптимально спроектированной ректификационной системы является обязательным поддержание системой управления расходов дистиллята или кубового продукта каждой колонны на значениях, определяемых из условий оптимальности (2).

Однако при управлении действующими ректификационными колоннами, спроектированными без соблюдения условий (2), необходимо проверять правомерность их использования. С этой целью проведена идентификация энтропийных математических моделей отдельных ректификационных колонн по данным технологических регламентов и рассчитаны зависимости информационного критерия (1) от относительного отбора дистиллята ε . Анализ результатов расчета показал, что на каждой колонне максимум критерия оптимальности (1) достигается при значениях ε , соответствующих условиям оптимальности (2) в пределах ошибок, соизмеримых с допустимыми ошибками измерения применяемых технических средств автоматизации. Тем самым доказана правомерность использования условий оптимальности (2) в задачах оптимального управления, рассматриваемых далее.

Центральная газофракционирующая установка (ЦГФУ), упрощенная схема которой приведена на рис. 2, предназначена для выделения из смеси углеводородов товарных пропановой, изобутановой, бутановой и пентановой фракций (концентрации целевых компонентов x_{26}^- , x_{33}^+ , x_{43}^- , x_{65}^- соответственно). Сырьё представлено состоящим из семи компонентов от этана до гексана.

Постановка задачи оптимального управления ЦГФУ заключается в следующем. Необходимо найти такие значения управлений, которые позволили бы получить товарные фракции регламентного качества при минимальных энергетических затратах на разделение и наличии ограничений типа неравенств на управления и координаты объекта управления.

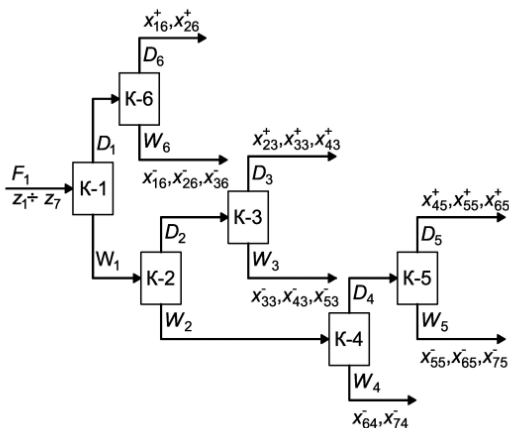


Рис. 2. Схема центральной газофракционирующей установки

При решении задачи декомпозиции получены условия оптимальности

$$\begin{aligned} D_6 &= F_1 \cdot z_1; & W_6 &= F_1 \cdot z_2; & D_3 &= F_1 \cdot z_3; \\ W_3 &= F_1 \cdot z_4; & D_5 &= F_1 \cdot z_5; & W_4 &= F_1 \cdot z_7; \end{aligned}$$

(6)

$$\frac{x_{16}^+ \cdot x_{23}^+ \cdot x_{36}^- \cdot x_{45}^+ \cdot x_{53}^-}{x_{16}^- \cdot x_{26}^+ \cdot x_{33}^- \cdot x_{43}^+ \cdot x_{55}^+} = 1; \quad \frac{x_{55}^- \cdot x_{65}^+ \cdot x_{74}^-}{x_{55}^+ \cdot x_{64}^- \cdot x_{75}^-} = 1.$$

Решение системы уравнений, состоящей из уравнений общего и покомпонентного материальных балансов и условий оптимальности (6), позволяет найти оптимальные значения расходов материальных потоков и концентраций компонентов в них.

Анализ полученных результатов показал, что реализация минимаксной стратегии оптимизации приводит к понижению разделительной способности промежуточных ректификационных колонн при гарантированном выполнении нормативных требований к качеству товарных фракций. Расчётами установлено, что при этом общие энергетические затраты уменьшаются на 6,6% по сравнению с базовым вариантом.

Следующий пример – отделение газоразделения крупнотоннажного производства этилена ЭП-450, схема которого изображена на рис. 3. Отделение включает батарею сепараторов (К-1), конвертор ацетилена (P) и шесть ректификационных колонн (К-2, ..., К-7).

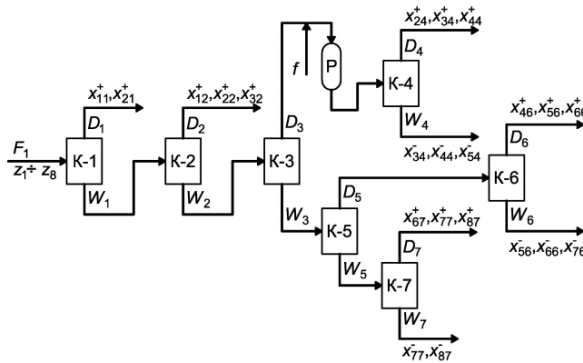


Рис. 3. Схема отделения газоразделения крупнотоннажного производства этилена ЭП-450

Сырьём отделения является пирогаз, который в задаче декомпозиции рассматривается как многокомпонентная смесь, состоящая из восьми компонентов: 1 – водород, окись углерода; 2 – метан; 3 – ацетилен, этилен; 4 – этан; 5 – пропилен; 6 – пропан; 7 – бутadiен; 8 – сумма бутанов и более тяжёлых компонентов. Ацетилен в конверторе P полностью вступает в реакцию гидрирования с водородом, поступающим с потоком f , и таким образом отсутствует в выходных потоках ректификационной системы. При возможном избытке водорода часть образовавшегося этилена гидрируется в этан.

Постановка задачи оптимального управления отделением газоразделения аналогична постановке предыдущей задачи. Требуется найти такие значения управлений, которые обеспечили бы минимум энергетических затрат на выделение товарных водородной, этиленовой, пропиленовой и бутadiеновой фракций регламентного качества (концентрации целевых компонентов $x_{11}^+, x_{34}^+, x_{56}^+, x_{77}^+$) при соответствующих ограничениях на управления и координаты объекта управления.

Конвертор ацетилена Р не имеет управлений, значения которых определялись бы при оптимизации отделения газоразделения в целом. В задаче декомпозиции математическая модель конвертора является оператором, преобразующим значения расхода и состава входного потока в значения расхода и состава выходного потока в соответствии со стехиометрическими коэффициентами реакций гидрирования.

При решении задачи декомпозиции получены условия оптимальности

$$D_j = F_j \cdot \sum_{i=1}^k z_{ij}, \quad j = 1, \dots, 7; \quad (7)$$

$$ТПО_1 = \frac{x_{22}^+}{x_{24}^+} \cdot \frac{x_{44}^+}{x_{44}^-} \cdot \frac{x_{34}^-}{x_{32}^+} = 1;$$

$$ТПО_2 = \frac{x_{44}^-}{x_{46}^+} \cdot \frac{x_{66}^+}{x_{66}^-} \cdot \frac{x_{56}^-}{x_{54}^-} = 1; \quad (8)$$

$$ТПО_3 = \frac{x_{66}^-}{x_{67}^+} \cdot \frac{x_{87}^+}{x_{87}^-} \cdot \frac{x_{77}^-}{x_{76}^-} = 1.$$

Условия оптимальности ТПО = 1 по своему физическому смыслу близки к условиям минимума затрат на осуществление процессов разделения, но не тождественны им, так как не учитывают различия в удельной стоимости разделения по отдельным колоннам. Учёт этого обстоятельства позволяет получить дополнительный выигрыш при функционировании ректификационной системы. Анализ показывает, что величина этого выигрыша в основном зависит от относительных летучестей разделяемых (ключевых) пар компонентов, принадлежащих колоннам, параметры которых входят в ТПО, и составляет 1-3 % от общих затрат. При этом экономический оптимум сдвинут относительно термодинамического (ТПО = 1) таким образом, что движение к экономическому оптимуму связано с увеличением степени разделения на тех колоннах, где относительные летучести α ключевой пары компонентов больше и соответственно удельные издержки на разделение меньше.

Было установлено, что

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_4} > 1, \quad \frac{\alpha_4}{\alpha_6} > 1, \quad \frac{\alpha_6}{\alpha_7} > 1;$$

здесь индекс при α указывает на номер колонны. Это означает, что экономический оптимум для всех ТПО сдвинут относительно термодинамического (8) в область, где ТПО > 1.

Используя проектные данные, по соотношениям (8) были получены численные значения термодинамических показателей оптимальности

$$\text{ТПО}_1 = 3.93; \quad \text{ТПО}_2 = 1785; \quad \text{ТПО}_3 = 12.4. \quad (9)$$

Решение задачи декомпозиции сводится к решению системы уравнений, состоящей из уравнений общего и покомпонентного материальных балансов колонн и условий оптимальности (7) и (9).

Системы оптимального управления, реализующие оптимальные режимы функционирования ректификационных систем, являются двухуровневыми. На верхнем уровне решаются задачи декомпозиции. Нижний уровень – локальные системы стабилизации режимных параметров ректификационных колонн на значениях, вычисленных на верхнем уровне и взятых из нормативных требований к качеству товарных фракций.

Разработанная теоретическая база системно-информационного подхода использована при анализе и оптимизации промышленных разделительных систем и создании автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ ТП) крупнотоннажных производств этилена [8-11]. Эти АСУ ТП приняты в промышленную эксплуатацию на ряде нефтехимических предприятий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вилков Г.Г.* Проектирование и управление разделительными химико-технологическими системами // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып.11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 183-192.
2. *Maikov V.P.* Optimal design of multicolumn rectification units from a heat–balance und economic point of view / V.P. Maikov, G.G. Vilkov, A.V. Gal'tsov // Chemistry and Technology of Fuels and Oils. 1971. V. 7, No 6. P. 422-429. DOI: 10.1007/BF00716525.
3. *Балунов А.И.* Энтропия и информация в теории ректификации / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2003. Т.46, № 9. С. 54-67.
4. *Балунов А.И.* Оптимальный отбор продуктов в процессе ректификации. Энтропийно-информационный анализ / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2013. Т.56, № 4. С. 97-106.
5. *Цирлин А.М.* Оценки затрат энергии и выбор оптимальной последовательности разделения многокомпонентных смесей / А.М. Цирлин, А.И. Балунов, И.А. Сукин // Теорет. основы хим. технологии. 2016. Т. 50, № 3. С. 258-267.
6. *Балунов А.И.* Термодинамический метод расчета составов продуктов разделения при ректификации непрерывных и дискретно-непрерывных смесей / А.И. Балунов, О.В. Дзюба, В.П. Майков // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 1996. Т. 39, № 1-2. С. 86-89.

7. Александров И.А. Ректификационные и абсорбционные аппараты. М.: Химия, 1965. 240 с.
8. Вилков Г.Г. Анализ разделительной системы фракционирующей абсорбер–ректификационная колонна / Г.Г. Вилков, А.И. Балунов, М.А. Васильев // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 1981. Т. 24, № 11. С. 1441-1445.
9. Вилков Г.Г. Алгоритм функционирования системы управления отделением газоразделения этиленовых установок типа ЭП-300 / Г.Г. Вилков, А.И. Балунов // Автоматизация и контрольно-измерительные приборы. 1977. № 5. С. 5-8.
10. Автоматизированная система управления крупнотоннажным производством этилена / под ред. Ю.М. Жорова. М.: Химия, 1986. 240 с.
11. Вилков Г.Г. Автоматизированное обучение технологического персонала отделения газоразделения крупнотоннажного этиленового производства / Г.Г. Вилков, К.В. Лебедев, А.И. Минаев, А.И. Балунов // Изв. вузов. Нефть и газ. 1988. № 4. С. 79-83.

УДК 778.241

В. Л. Зудин, А. Г. Маланов

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: zudinvl@ystu.ru

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
КАЧЕСТВА ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ЭКРАНЕ С УЧЕТОМ
РЕАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НАБЛЮДЕНИЯ**

В статье определяются показатели обеспечения оптимальных условий наблюдения с учетом эргономических ограничений для значений этих показателей, а также приводится расчет требуемого светового потока проектора и площади изображения.

Ключевые слова: освещенность экрана, контрастность изображения, внешняя засветка экрана, эргономические ограничения, световой поток проектора, площадь изображения.

V. L. Zudin, A. G. Malanov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: zudinvl@ystu.ru

**THE DETERMINATION OF OPTIMAL INDICATORS
IMAGE QUALITY ON THE SCREEN TAKING INTO
ACCOUNT THE ACTUAL CONDITIONS OF OBSERVATION**

The article identifies indicators of optimal observation conditions taking into account ergonomic constraints for the values of these parameters, and also calculates the required luminous flux of the projector and the image area.

Keywords: illumination of the screen, contrast, outer screen illumination, ergonomic constraints, luminous flux of the projector, area of the image.

Вопросам определения контрастности изображения посвящены работы [2-4]. В работе [2] было получено уравнение, связывающее основные параметры, определяющие качество изображения на экране в условиях воздействия посторонней засветки с освещенностью E рабочих мест учащихся и контрастности K

$$\frac{F}{S} = E(K-1), \quad (1)$$

где F – требуемый световой поток проектора, S – площадь изображения на экране. Для упрощения дальнейших записей обозначим: $K' = K - 1$; $A = F/S$. Тогда

$$A = EK'. \quad (2)$$

Найдем зависимость оптимальных значений E и K' от величины A , которую, обычно можно считать известной.

При минимально допустимых значениях внешней засветки $E_{\text{мин}} = 30$ лк и контрастности $K_{\text{мин}} = 10$ ($K'_{\text{мин}} = 9$), определяемых эргономическими факторами, из (2) получаем минимальное допустимое значение $A = 270$. Представляется разумным, что при $A > 270$ соотношение между оптимальными (конечно, не в строгом математическом понимании) значениями E и K' такое же, как и при $A = 270$:

$$\frac{K'}{E} = \frac{9}{30} = 0,3,$$

то есть

$$K' = 0,3E. \quad (3)$$

Подставляя (3) в формулу (2), получим $0,3E^2 = A$. Отсюда находим зависимость оптимальных значений E и K' от величины A :

$$E = \sqrt{A/0,3} = 1,825\sqrt{A}, \quad K' = 0,3E = 0,548\sqrt{A}.$$

Поскольку K' и E пропорциональны (с коэффициентом 0,3), то графики функций $E = E(A)$ и $K' = K'(A)$ можно изобразить одной кривой, нанося на вертикальную ось две шкалы, для E и K' (рис. 1).

Например, для $A = 1000$ за оптимальные значения освещенности E и контрастности K' принимаем 58 и 17 соответственно. Учитывая, что $K' = K - 1$, реальное значение контрастности составит $K = K' + 1 = 18$.

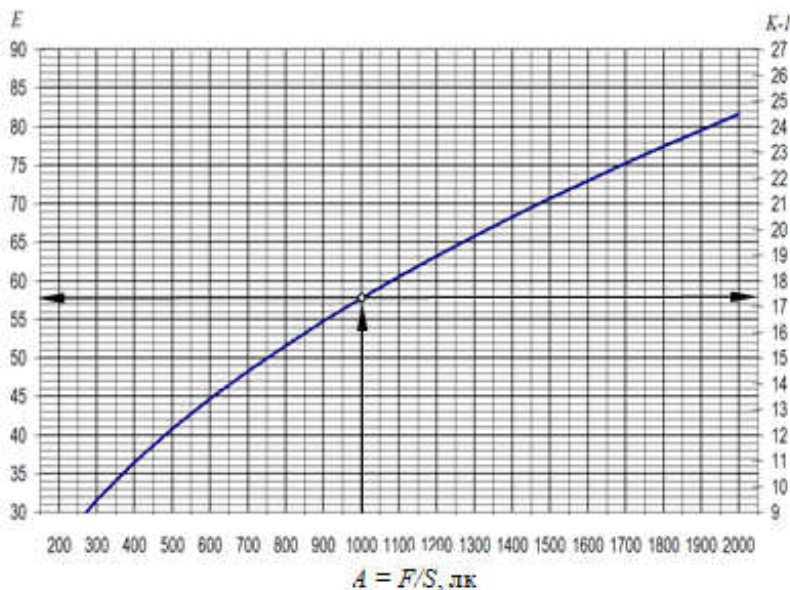


Рис. 1. Зависимости $E = E(A)$ и $K' = K'(A)$

При необходимости допустимо взаимное изменение значений E и K' при обязательном сохранении их произведения A неизменным, с учетом минимальных допустимых значений этих параметров. Заметим, что изменение E или K' на десять процентов практически неразлично визуально.

Выше предполагалось, что величина $A = F/S$ заранее известна, однако до сих пор не указывалось, каким образом это было достигнуто. Далее этот вопрос рассматривается более подробно.

При определении требуемого светового потока F , как правило, приходится решать одну из двух задач:

1. В наличии имеется готовый видеопроектор. В этом, наиболее простом случае, номинальная величина F светового потока определяется по паспортным данным проектора.

2. Потребитель только собирается приобретать видеопроектор и хочет знать, каким должен быть его световой поток для использования в конкретной учебной аудитории. Эта ситуация требует более подробного рассмотрения.

Совершенно очевидно, что чем больше площадь S изображения на отражающем проекционном экране, тем большим должен быть и световой поток F проектора. Отношение F/S представляет собой освещенность эк-

рана. Его величина согласно действующим нормативным документам [5] должна составлять не менее 500 лк, т.е. $F/S \geq 500$.

Следовательно, для определения требуемого светового потока F необходимо вычислить площадь S проецируемого на экран изображения. Эта площадь может быть определена исходя из геометрических возможностей аудитории, в частности, высоты H_a её передней стены (рис. 2). Подробно этот вопрос рассмотрен в работе [3].

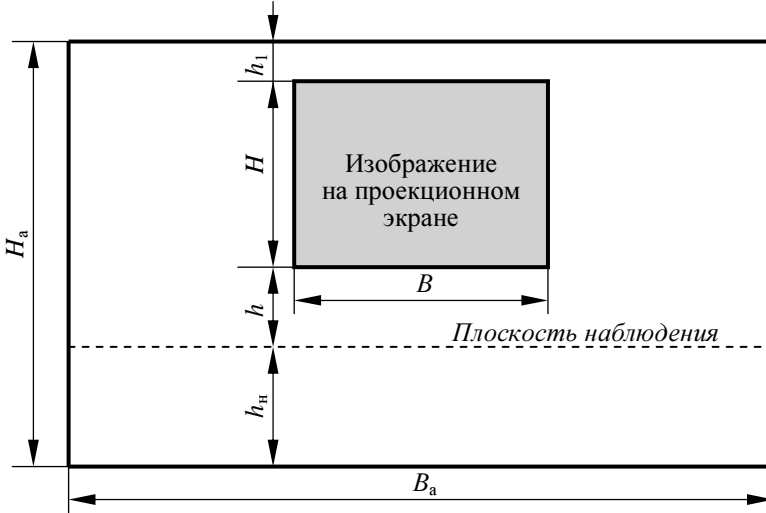


Рис. 2. Передняя стена аудитории и размещение проекционного экрана

Для аудиторий с горизонтальным полом по всей их длине максимально допустимая высота H изображения составляет

$$H = H_a - h - h_1 - h_n,$$

где H_a – высота аудитории; h – расстояние от плоскости наблюдения до нижней кромки экрана; h_1 – расстояние от верхней кромки изображения до потолка аудитории; h_n – высота расположения плоскости наблюдения над полом аудитории.

Плоскостью наблюдения называют плоскость, в которой размещены (усредненно) глаза всех учащихся; для взрослых людей её расстояние h_n от пола принимают равным 1,2 м.

Высота h зависит от угла зрения 3° [1] на нижнюю кромку экрана и расстояния наблюдения, принимаемого равным длине аудитории; эта высота вычисляется по формуле

$$h = 0,05 L_a.$$

Расстояние h_1 определяется из практических соображений и обычно составляет от 0,1 до 0,3 м. При этом учитываются габариты кожуха экрана, необходимое место для его крепления к стене и обслуживания, а также то обстоятельство, что габариты экранного полотна должна несколько превышать габариты изображения, т.к. изображение не должно выходить за пределы полотна экрана.

Если аудитория имеет значительную высоту, следует выполнить проверку на обеспечение угла зрения для учащегося, сидящего в первом ряду, на верхнюю кромку экрана. Этот угол не должен превышать 45° (рис. 3).

При известном значении расстояния L от передней стены до глаз учащегося величина H_d , определяющая максимальную высоту размещения верхней кромки экрана при угле зрения 45° , определится из очевидного уравнения $H_d = L - h$.

Сравнивая значение H_d с полученной ранее величиной H , следует убедиться в том, что $H_d \geq H$. В противном случае нужно увеличить значение L до величины, равной $H + h$.

По определенной ранее высоте H изображения при известном соотношении сторон изображения (как правило, оно составляет 4:3, 16:9 или 1:1) нетрудно определить его ширину B и площадь изображения S .

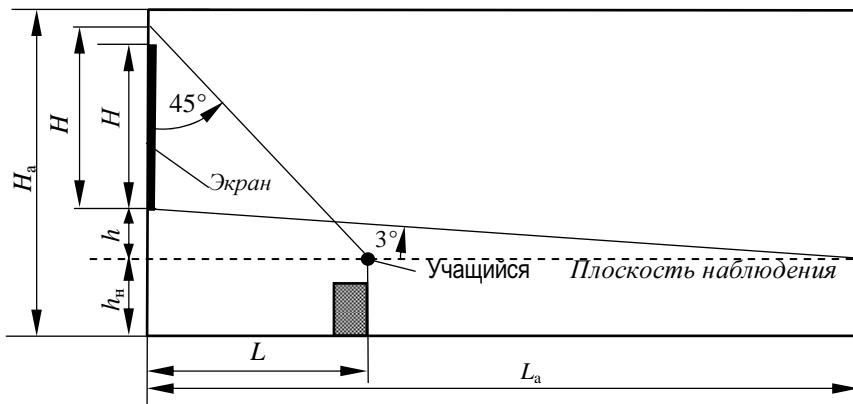


Рис. 3. Расчетная схема величины H_d

Обозначив отношение меньшей стороны (т.е. высоты H) к большей (ширине B) как $k = H/B$, получаем

$$B = H/k. \quad S = HB = H^2/k.$$

Отметим, что существуют и другие способы задания одного из габаритов изображения – H или B [3], например, в зависимости от угла обзора

глаз учащегося при неподвижной голове, от условия неразличимости границ между пикселями изображения, от разрешающей способности глаза человека, от места установки проектора и т.д.

Таким образом, определение величин светового потока F и площади изображения S на проекционном экране позволяет определить величины контрастности изображения K и освещенности E на рабочих местах учащихся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долин П.А. Справочник по технике безопасности. М.: Энергоатомиздат, 1985. 824 с.
2. Зудин В.Л. К выбору проектора для получения качественного изображения в полузатемнённых учебных помещениях. // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 197-203.
3. Зудин В.Л. Проектирование технического оснащения лекционной аудитории: монография. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. 280 с.
4. Зудин В.Л. Расчет контрастности изображения на экране при наличии посторонней засветки // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 10. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2015. С. 114-121.
5. Санитарные правила и нормы СанПиН 2.2.1/2.1.11278-03 "Гигиенические требования к естественному, искусственному и совмещенному освещению жилых и общественных зданий".

УДК 535.8

П. А. Иванов

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ivanovpa@ystu.ru

КВАДРАТИЧНЫЕ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФИЛЬТРЫ В ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА БАЗЕ ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ ПРОЦЕССОРОВ

Приводятся результаты моделирования на ПЭВМ распознавания двумерных полутоновых изображений, подвергнутых геометрическим преобразованиям, а также межклассовое распознавание с помощью квадратичных и полиномиальных корреляционных фильтров.

Ключевые слова: корреляционные фильтры, корреляционная функция, преобразование Фурье, распознавание изображений.

P. A. Ivanov

*Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: ivanovpa@ystu.ru*

QUADRATIC AND POLYNOMIAL CORRELATION FILTERS IN PROBLEMS METHODS OF IMAGE RECOGNITION BASED ON OPTOELECTRONIC PROCESSORS

The results of PC modeling of 2D grayscale images with geometrical deformations and several classes recognition with the usage of invariant correlation filters are given.

Keywords: *correlation filters, correlation function, Fourier transform, image recognition.*

Привлекательным подходом к решению задачи распознавания изображений, полученных при аэрофотосъемке местности или объектов, находящихся в состоянии движения, является применение возможностей оптоэлектроники. Использование оптикоэлектронных корреляторов привлекательно, прежде всего, в связи с возможностью реализации параллельных вычислений и высокой производительностью оптики, а также в связи с наличием хорошо разработанной элементной базы как оптической, так и электронной подсистем подобного устройства. В зависимости от типа системы, коррелятор может быть оптикоэлектронный (когерентный или некогерентный), цифровой (спецпроцессор) или гибридный – сочетающий цифровые и оптические методы. Основной функцией данного устройства является вычисление корреляционной функции входных данных с эталонным объектом. Среди схем оптикоэлектронных корреляторов широкое распространение получили схемы 4f-коррелятора (схема Ван-дер-Люгта), коррелятор совместного преобразования изображений, акустооптические корреляторы, а также многочисленные модификации указанных решений [1]. Схема коррелятора совместного преобразования приведена на рис.1.

При корреляционном распознавании изображений, подвергнутых геометрическим преобразованиям (а в естественных условиях, например, при аэрофотосъемке, таковые есть всегда), выходной корреляционный пик резко деградирует при самых малейших изменениях геометрии распознаваемого объекта (за исключением преобразования сдвига, т.к. корреляционная функция обладает автоматической инвариантностью к этому типу преобразований). Довольно привлекательным и популярным вариантом выбора эталона является применение составного инвариантного корреляционного фильтра [1]. В данной работе в качестве объекта исследования использовались инвариантные корреляционные фильтры (КФ) следующих

типов: DCCF (корреляционный фильтр с контролем межклассового расстояния), полиномиальные и квадратичные фильтры. Были проведены эксперименты по компьютерному моделированию распознавания изображений, подвергнутых геометрическим преобразованиям поворота и изменению масштаба, а также межклассовому распознаванию изображений.

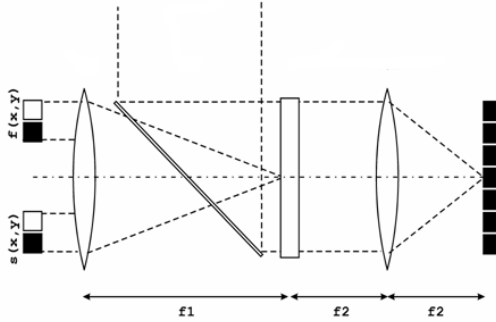


Рис. 1. Схема коррелятора совместного преобразования

Рассмотрим вышеуказанные алгоритмы синтеза КФ[2]:

1) DCCF-фильтр

$$J(h) = \frac{A(h)}{B(h)}, A(h) = h^+ S_A h, B(h) = h^+ S_B h. \quad (1)$$

$$S_A = \frac{1}{d} \sum_{c=1}^C (\bar{x}_c - \bar{x}) \cdot (\bar{x}_c - \bar{x})^+.$$

$$S_B = \frac{1}{d} \sum_{c=1}^C \sum_{i=1}^N (X_{ic} - \bar{X}_c) \cdot (X_{ic} - \bar{X}_c)^+,$$

где X_c - изображение соответствующего класса; C - число классов; X_{ic} - диагональная матрица, которая состоит из 2D-преобразований Фурье изображения с номером i класса c ; d - варьируемый параметр; h - фильтр, черта сверху означает усреднение, знак + над выражением - комплексное сопряжение.

2) Полиномиальные фильтры

$$H = S^{-1} \cdot X, \quad (2)$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix},$$

$$S_{pq} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i^p - \bar{X}^p) \cdot (X_i^q - \bar{X}^q)^*$$

где p и q - соответствующие степени;

3) Квадратичные фильтры.

$$g(m,n) = \sum_{i=1}^{N_1} \left(F^{-1} \{ F \{ x(m,n) \} \cdot F^* \{ f_i(m,n) \} \} \right)^2 - \sum_{i=1}^{N_2} \left(F^{-1} \{ F \{ x(m,n) \} \cdot F^* \{ b_i(m,n) \} \} \right)^2. \quad (3)$$

Здесь F - преобразование Фурье соответствующего выражения; F в степени -1 - обратное преобразование Фурье, знак * - комплексное сопряжение; f_i, b_i - наибольшие положительные и, соответственно, отрицательные собственные вектора (количество первых N_1 , вторых, соответственно, N_2 штук); $x(m,n)$ - подаваемое на вход изображение.

Блок-схема реализации фильтра представлена на рис. 2.

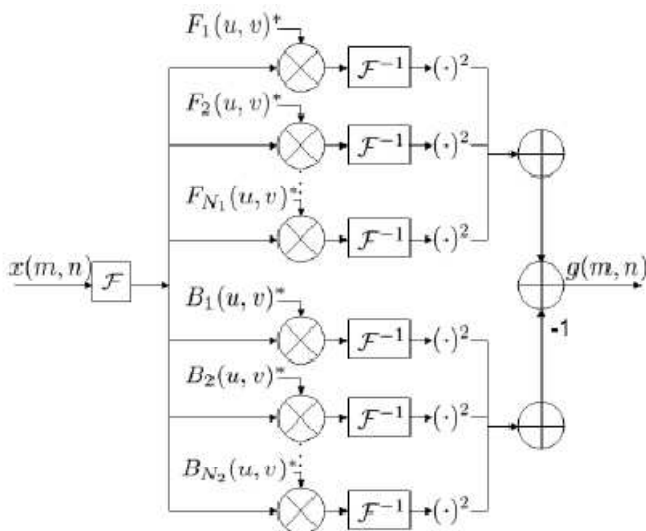


Рис. 2. Блок-схема реализации квадратичного фильтра

В качестве среды моделирования был выбран пакет Matlab Mathworks, как наиболее подходящий для подобного рода задач. Для каждого случая вычислялись значения корреляционных функций (1), нормированных на величину максимального пика (количественные характеристики корреляции)

$$C(x_c, y_c) = \iint_{\pm\infty} f_{xm}^*(x, y) \cdot f_{yx}(x - x_c, y - y_c) dx dy. \quad (4)$$

Здесь $*$ - обозначает комплексное сопряжение; $f_{эт}$ и $f_{вх}$ - эталонное (фильтр) и входное изображения, соответственно.

Распознавание изображений, подвергнутых преобразованию поворота. В качестве исходных изображений использовалась база данных объекта типа “самолет”, подвергнутых преобразованию поворота в плоскости на углы от 0 до 355° с шагом 5°, 10° и 15°, всего соответственно 72, 36 и 24 изображения. На основе указанной базы были синтезированы фильтры (для каждого случая отдельно), после чего вычислялись корреляции (корреляционные функции) всех 72-х объектов из этой же базы данных с построенными фильтрами. Типичное исходное и распознаваемое изображение представлено на рис. 3. Вычислялись величины пиков корреляции, нормированные на максимальное значение (количественные характеристики пика), а также величины отношений значения пика корреляции к отклонению от среднего (по фону корреляционной картины), и значения пика корреляции к среднему квадратическому отклонению от среднего (по фону корреляционной картины), которые обозначены как PSR_SD и PSR_AV, соответственно (качественные характеристики пика). Изображение считалось распознанным по значению порога, который принимался равным 0,5 от максимальной величины пика корреляции, как это принято, например, в [3]. График зависимости нормированной величины корреляционного пика от угла поворота представлен на рис. 4.



Рис. 3. Изображение распознаваемого объекта

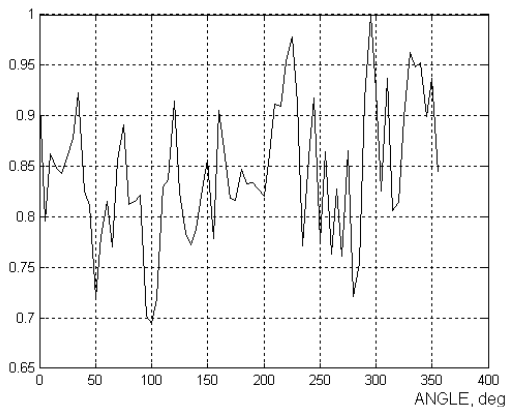


Рис. 4. Зависимость нормированной величины корреляционного пика от угла поворота, шаг 5°

Распознавание изображений, подвергнутых преобразованию изменения масштаба. В качестве исходных изображений использовалась база данных тех же объектов типа “самолет” (представленных на рис. 3), подвергнутых преобразованию изменения масштаба в диапазоне от -100% до +100% от первоначального с шагом 5, 10 и 15%, всего соответственно 21, 11 и 7 изображений (отдельно для увеличения и уменьшения масштаба). На основе указанной базы были также синтезированы фильтры (для каждого случая отдельно), после чего вычислялись корреляции (корреляционные функции) всех имеющихся в базе 41-го объекта с построенными фильтрами. Были вычислены те же характеристики пика, что и в случае с преобразованием поворота. График зависимости нормированной величины корреляционного пика от величины изменения масштаба (%) приведены на рис. 5.

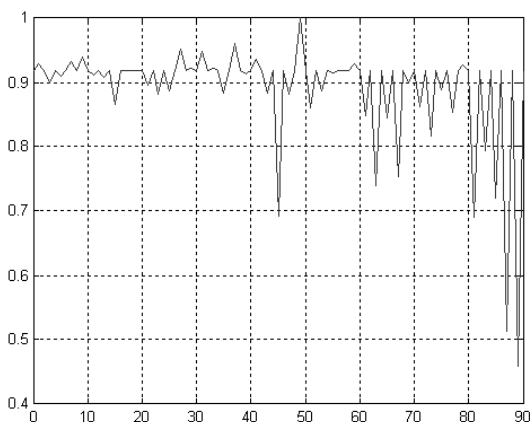


Рис. 5. Зависимость нормированной величины корреляционного пика от изменения масштаба (шаг 2%)

Межклассовое распознавание изображений. В качестве исходных изображений использовалась база данных, содержащих 90 “истинных” объекта типа “самолет” (т.е. подлежащих распознаванию, см. рис. 3) и 90 “ложных” объекта того же типа (т.е. подлежащих отклонению, рис. 6), подвергнутых преобразованию изменения масштаба в диапазоне от -100% до +100% от первоначального.

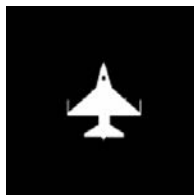


Рис. 6. Изображение “ложного” объекта

На основе указанной базы были синтезированы фильтры (отдельно для случая всех 144 объектов, отдельно только для 72-х “истинных” объектов), после чего вычислялись корреляционные функции всей базы из 144 объектов (“истинных” и “ложных”) с фильтрами. Вычислялись те же параметры корреляционного пика, что и в 2-х предыдущих случаях (для поворота и изменения масштаба). Коэффициенты PSR_SD и PSR_AV вычислялись раздельно для “истинных” и “ложных” изображений, критерием ошибки считались ситуации, когда значения нормированных на соответствующий максимум величин корреляции для “ложных” изображений превышали те же значения для “истинных”. Результаты моделирования для квадратичного фильтра представлены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты моделирования межклассового распознавания

Число исходных изображений	Изменение масштаба, шаг, %	Разрешение, пиксели	PSR_SD	PSR_AV	Число ошибок
90	-1	64x64	15.2–47.0	19.0–90.0	0
		32x32	5.0–12.2	5.6–15.1	3
55	+1	64x64	22.5–26.4	19.0–30.0	0
		32x32	18.9–20.8	18.5–25.6	0
45	-2	64x64	15.6–44.8	24.0–100.0	0
		32x32	5.0–14.5	5.7–20.0	1
27	+2	64x64	16.0–30.1	14.8–35.1	0
		32x32	17.7–24.3	19.0–35.0	0

Обсуждение результатов моделирования. Применение полиномиального фильтра приводит к удовлетворительным результатам по количеству ошибок для распознавания изображений, подвергнутых преобразованию поворота, при шаге угла поворота до 10° (т.е. разница в углах поворота изображений, участвовавших в генерации фильтра и предъявленных к распознаванию до 5°). Очень хорошие результаты получены для распознавания изображений, подвергнутых преобразованию изменения масштаба, прежде всего, в сторону уменьшения. Имеют место очень высокие качественные характеристики пика, даже при низком разрешении, при минимальном количестве ошибок. С учетом того факта, что свертка/корреляция автоматически обладает инвариантностью к сдвигу распознаваемого объекта, результаты моделирования позволяют надеяться на успешное применение данного КФ для подобного класса задач.

К сожалению, применение полиномиального фильтра для моделирования для межклассового распознавания изображений следует признать неудовлетворительными, однако следует учитывать, что в проведенном моделировании относительно распознавания “истинных” и “ложных” объектов решалось, фактически, одновременно 2 задачи – помимо собственно

межклассового распознавания одновременно проводилось распознавание изображений обоих классов, подвергнутых преобразованию поворота и изменению масштаба. Последовательное применение фильтра DCCF (для разделения классов) и полиномиального (для решения собственно задачи распознавания) приводит к удовлетворительным результатам, однако ценой одновременного синтеза двух разных корреляционных фильтров, что требует очень существенных вычислительных мощностей, а также (ввиду наличия двух последовательных стадий решения задачи) делает затруднительным использование такого способа в реальном масштабе времени. Проблема отчасти снимается за счет применения квадратичного фильтра (распознавание в одну стадию), тем не менее, количество операций по выполнению преобразования Фурье $(2(N_1+N_2)+1)$ на пиксель изображения все равно очень велико. Проблему, видимо, следует решать в плане разработки алгоритмов, снижающих вычислительную емкость метода, либо в использовании других типов КФ,

Выводы.

1. Проведен синтез на ПЭВМ инвариантных корреляционных фильтров и приводятся результаты применения этих типов КФ для задач распознавания 2D-изображений, подвергнутых геометрическим преобразованиям поворота, изменения масштаба, а также межклассовому распознаванию таких объектов.

2. Результаты моделирования применения DCCF-фильтра для указанных задач показывают возможность его использования лишь как вспомогательного объекта для решения задачи разделения классов при межклассовом распознавании изображений, распознавание изображений, подвергнутых непосредственно преобразованиям геометрии, целесообразно производить с помощью других типов фильтров.

3. Использование полиномиальных фильтров, либо, в случае межклассового распознавания, DCCF+полиномиальный, приводит к удовлетворительным результатам в количественном плане, особенно для преобразования изменения масштаба.

4. Использование квадратичных фильтров может заменить в случае межклассового распознавания схему в 2 стадии (DCCF+полиномиальный), т.е. распознавание можно провести с помощью одного лишь квадратичного фильтра, однако, за счет серьезной вычислительной нагрузки ПЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Информационная оптика / Н.Н. Евтихийев, О.А. Евтихьева, И.Н. Компанец [и др.]. М.: Изд-во МЭИ. 2000.
2. *Vijaya Kumar B. V. K.*. Tutorial survey of composite filter design for optical correlators // *Appl. Opt.* 1992. 31. P. 4773-4801,

3. *Ivanov P.A. Comparison of correlation peaks characteristics for scaled images recognition using MACE, GMACE and MINACE filters // Proc. SPIE. 2013. Vol.8748, P. 8748. ON1-8748ON-6,*
4. *Synthesis and research of LPCC invariant correlation filters for pattern recognition / N.N. Evtikhiev, P.A. Ivanov, A.S. Lyapin, B.M. Reyzin, A.V. Shevchuk, S.I. Sirotkin, R.S. Starikov, A.V. Zaharcev // Proc. SPIE. 2005. Vol. 5851. P.242-245.*
5. *Experiments on realization of wavelet transform based on architecture of hybrid optoelectronic chip / N.N. Evtikhiev, P.A. Ivanov, A.V. Kamensky, R.S. Starikov, M.I. Zabulonov // Optical memory & neural network. 2002. Vol. 11, No1. P. 39-43.*

УДК 519.252:343.9

П. С. Ивличев, Н. А. Ивличева

Рязанский филиал Московского университета МВД России
им. В. Я. Кикотя
Россия, г. Рязань, e-mail: psi940@mail.ru

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРИМЕНЕНИЯ АППАРАТА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ДЛЯ ПРОГНОЗА УРОВНЯ ПРЕСТУПНОСТИ В РЕГИОНЕ

Рассматриваются вопросы применения анализа временных рядов к прогнозированию криминогенной ситуации. Приводятся критерии применения технического анализа к прогнозу, даются рекомендации по методике прогнозирования в случае несоответствия статистики критериям.

Ключевые слова: криминология, технический анализ, временные ряды, прогноз, тренд, интервальная оценка.

P. S. Ivlichev, N. A. Ivlicheva

*Ryazan branch of the V.Y. Kikot Moscow University
of the MIA of Russia
Russia, Ryazan, e-mail: psi940@mail.ru*

ON THE PECULIARITIES OF APPLICATION OF THE MATHEMATICAL STATISTICS TO FORECAST THE LEVEL OF CRIMINALITY IN THE REGION

The paper considers questions of application of the analysis of time series to the forecasting of the criminal situation. We give criteria for applying technical analysis to the forecast and recommendations on a forecasting method in case of statistical discrepancy with the criteria.

Keywords: criminology, technical analysis, time series, forecast, trend, interval estimation.

Одной из важнейших задач криминологической науки является анализ состояния и прогноза преступности. В связи с тем, что многие показатели, связанные с описанием уровня преступности, имеют числовое выражение, естественным образом возникает вопрос о применении математического аппарата, в частности, методов математической статистики.

В рамках инициативных и заказных работ Рязанским филиалом Московского университета МВД России имени В. Я. Кикотя ежегодно проводятся исследования, направленные на прогнозирование криминогенной ситуации в регионе как в целом [2], так и по отдельным составам преступлений [1, 3].

Использование численных методов подразумевает применение одного из двух классических подходов к прогнозированию.

1. Технический анализ. В этом подходе статистические методы применяются безотносительно к предметной области. Достоинством такого подхода является наличие и проработанность строгого математического аппарата. К недостаткам следует отнести крайнюю примитивность математической модели, невозможность адекватного учета факторов, не имеющих количественного измерения.

2. Фундаментальный анализ. Этот подход предполагает изучение предметной сферы, выявление существенных факторов и показателей, как количественных, так и качественных. Достоинством такого подхода является более точное описание предметной сферы, к числу недостатков относится его трудоемкость, а также отсутствие во многих случаях доказательных методик. Таким образом, фундаментальный анализ может выражать точку зрения конкретного ученого, опираясь на его специализацию, научный и жизненный опыт. Результаты одного из таких исследований приведены в статье [1].

Трудоемкость фундаментального анализа обеспечивает востребованность средств технического анализа и делает аппарат математической статистики довольно популярным в криминологии.

Однако, в целях устранения недостатков, присущих техническим методам, на этапе применения аппарата математической статистики следует стараться проанализировать природу эмпирических данных, причину наличия в них закономерностей и аномалий.

С точки зрения прогнозирования, наибольший интерес представляет регрессионный анализ. Как правило, используется парная линейная регрессия, что в криминологической сфере представляется наиболее рациональным решением. Логическое объяснение полиномиальной регрессии подобрать, зачастую, невозможно, а обосновательное ее применение приводит к иллюзии точности прогнозирования, поскольку число актуальных точек для прогнозирования числа преступлений, как правило, невелико и

увеличение степени полинома приводит к увеличению коэффициента детерминации при отсутствии обоснования полиномиальной модели. Применение экспоненциальной регрессии также не логично, поскольку экспоненциальные тренды характерны для неконтролируемых процессов. Применение множественной регрессии затруднительно по причине сложности выделения числовых факторов в области криминологии.

При этом совершенно очевидно, что при использовании технического анализа в прогнозировании числа преступлений, необходимо делать прогноз по каждому из составов преступлений, не укрупняя группы далее статьи уголовного кодекса. Прогнозы по главам и, тем более, прогноз по общему числу преступлений не могут быть достоверными, поскольку опираются на слишком разнородные данные.

При использовании регрессии в качестве метода прогнозирования необходимо обращать внимание на значимость уравнения регрессии и на эмпирическую базу для построения уравнения регрессии. Наиболее целесообразной является выбор базового года в соответствии с годом последнего существенного изменения редакции прогнозируемой статьи. Как правило, этот период не превышает десяти лет, в связи с чем проблема выявления значимости уравнения регрессии стоит очень актуально.

Другая проблема связана с тем, что наибольший интерес у криминологов вызывают интервальные прогнозы, с помощью которых можно оценить вероятность прогноза. Однако, даже при сравнительно небольших коэффициентах вариации в 10-30 %, величина предельной ошибки может стремиться к среднему значению при уровне доверия 95 %, делая технический прогноз фактически бессмысленным. В связи с чем применение регрессионного анализа для таких составов преступлений можно считать нецелесообразным.

При использовании регрессионного анализа необходимо обращать внимание на наличие аномальных точек в эмпирических данных. Такие точки могут быть обусловлены эффектами кратковременных управленческих решений, нарушениями регистрационной дисциплины и другими. В случаях, когда после года аномального значения уровень преступности возвращается к основному тренду, целесообразно при построении уравнения регрессии заменить аномальное эмпирическое значение усредненным по методу скользящей средней.

Как показывает статистика преступности по Рязанской области, регрессионный анализ может быть эффективно использован при прогнозе числа преступлений по составам следующих статей Уголовного кодекса Российской Федерации: 105, 109, 111, 112, 115, 116, 119, 131, 146, 150, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 166, 167, 168, 186, 222, 223, 228, 228.1, 232, 260, 264, 291, 292, 306, 319, 327 [1]. Это наиболее типичные для региона виды

преступлений, на их долю приходится около 88 % от общего количества, таким образом, регрессионный анализ может являться эффективным средством прогнозирования криминогенной обстановки в регионе. Так, при прогнозировании состояния преступности на 2016 год с помощью только технического анализа были получены верные результаты для 26 из 33 составов преступлений. Хорошую точность регрессионный анализ показывает и при анализе отдельных сфер правонарушений, в частности, в налоговой сфере [1].

Вторую по величине категорию преступлений составляют преступления с неустойчивой тенденцией. Это новые составы преступлений либо составы, квалификация которых претерпела значительные изменения. В этом случае уравнение регрессии не является значимым. Для технического прогноза здесь можно использовать только точечные прогнозы по эмпирическим данным за различные годы. Доля таких преступлений составляет около 10 % от общего числа по региону. Отказ от интервального прогноза здесь целесообразен хотя бы по причине того, что предельная ошибка при высоком уровне точности невелика и приводит к заведомо неверным результатам из-за неустойчивости тенденции. К примеру, при прогнозе количества преступлений по статье 156 накладываются две тенденции: восходящая, обусловленная расширением круга лиц, которые могут быть привлечены к уголовной ответственности, и нисходящая, обусловленная ужесточением уголовной ответственности.

Третью категорий занимают преступления, чья доля в общем числе не превышает 0,1 %. Проведение регрессионного анализа для таких преступлений нецелесообразно по причине того, что предельная ошибка из-за малой величины точечного прогноза может оказаться выше прогнозируемого значения. В связи с тем, что общая доля нетипичных для региона преступлений не превышает 2 %, при прогнозировании их количества целесообразно ограничиться минимальным и максимальным значением. При прогнозировании 73 из 89 составов преступлений таким методом были получены подтвердившиеся в 2016 году интервалы с максимальной предельной ошибкой в шесть преступлений.

Описанная методика прогнозирования использовалась при составлении прогноза состояния преступности в Рязанской области в 2016 году и показала хороший результат даже без применения фундаментального анализа.

Тем не менее, необходимость более полного использования возможностей фундаментального анализа очевидна, поскольку регрессия не может учесть тенденции в изменении законодательства, а взаимосвязь с социальными и экономическими процессами не всегда выражается числовыми показателями. Однако это уже выходит за рамки технического анализа, поэтому корректировка прогноза осуществлялась группой специали-

стов в области экономики, уголовного права, криминологии, которыми было спрогнозировано улучшение криминогенной обстановки в регионе в 2016 году в сравнении с 2015 годом, что и нашло свое подтверждение в статистике преступности 2016 года [2].

Вместе с тем, технический анализ помимо прогностической функции может выполнять и функцию анализа качества борьбы с преступностью.

В этом случае следует проанализировать причину успешности или неуспешности применения математических методов.

Как уже упоминалось выше, наличие аномальной точки может указывать на попытку манипуляции со статистикой. Кратковременное снижение показателя может указывать на недостаточный контроль регистрационной дисциплины сотрудников, на рост латентной преступности, на низкую квалификацию сотрудников и руководителей аномального периода.

Высокое значение F-критерия при проверке значимости уравнения линейной регрессии может указывать на отсутствие мер со стороны сотрудников подразделения, направленных на снижение числа данных преступлений. В случае, когда статья подвергалась существенным изменениям со стороны законодателей, высокое значение F-критерия может указывать на попытку подтасовки данных. Еще одним способом выявления подтасовки данных является анализ временного ряда количества преступлений на автокорреляцию. Количество преступлений по своей природе является случайной величиной, поэтому появление функциональной зависимости между соседними значениями количества преступлений является ненормальным с точки зрения теории вероятности.

Нарушение многолетнего тренда указывает на внезапное появление существенного фактора. Помимо изменений в законодательстве и усиления регистрационной дисциплины, это может быть обусловлено действиями руководства региональных органов внутренних дел или влиянием социальных либо экономических факторов.

Опыт прогнозирования уровня преступности в Рязанской области в 2015 и 2016 годах показывает, что для решения задачи быстрого получения числового прогноза возможностей аппарата математической статистики с некоторыми оговорками вполне достаточно. Однако для более детального прогноза и для получения качественных выводов необходимо привязывать уровень преступности к экономической ситуации в регионе, а также к новеллам уголовного законодательства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Индикаторы наличия экономических правонарушений в финансово-хозяйственной деятельности организаций / Р.А. Корнилович, С.А. Коноваленко, П.С. Ивличев [и др.]. Рязань: Рязан. филиал Моск. ун-та МВД России им. В.Я. Кикотя, 2016.

2. Состояние криминогенной обстановки и предупреждение преступлений в Рязанской области: научно-аналитический обзор / А.Я. Гришко, А.В.Ендольцева, Р.Б. Осокин, Д.Е.Некрасов, Р.А. Корнилович, П.С. Ивличев [и др.]; под общ. ред. д.ю.н., проф. А.В. Ендольцевой; под науч. ред. д.ю.н., проф. А.Я. Гришко, д.ю.н., доц. Р.Б. Осокина, к.ю.н., доц. Д.Е. Некрасова. Рязань: Рязан. филиал Моск. ун-та МВД России им. В.Я. Кикотя, 2015.
3. *Ивличев П.С.* Анализ динамики преступлений в сфере компьютерной информации в Рязанской области / П.С. Ивличев, Н.А. Ивличева // Преступность в сфере информационных и телекоммуникационных технологий: проблемы предупреждения, раскрытия и расследования преступлений. Воронеж: ВИ МВД России, 2015. С. 51-55.

УДК 004.8.032.26

Е. Г. Казаров, А. М. Рудаков, А. В. Новик, Т. И. Коваленко

Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны
Россия, г. Ярославль, e-mail: kvalitet@hotmail.ru, rudakov76loko@mail.ru

ПРИКЛАДНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРАВИЛ КОМБИНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Проведена апробация наиболее распространённых случаев, встречающихся при расчете комбинированных значений масс вероятности, для пересечения фокальных элементов. Рассмотрены случаи прикладного применения наиболее распространённых правил Ягера, Инагаки и Демпстера для оценки комбинированных значений масс вероятности имеющих свидетельств.

Ключевые слова: комбинированные значения масс вероятности, правило, конфликтность, свидетельство, характеристика, экспертная оценка.

E. G. Kazarov, A. M. Rudakov, A. V. Novik, T. I. Kovalenko

Yaroslavl Higher Military School of Air Defense
Russia, Yaroslavl, e-mail: kvalitet@hotmail.ru, rudakov76loko@mail.ru

THE APPLICATION OF RULES FOR COMBINING EXPERT ESTIMATES

The article concerns the approbation of the most common cases occurring in calculating the combined values of probability masses for the intersection of focal elements. The considered approach suggests research of the cases of applied use of the most common Yager's rule, Inagaki's unified combination rule and Dempster's rule for determination the combined values of evidence.

Keywords: the combined values of probability masses, rule, conflict, evidence, specification, expert assessment.

При разработке научного подхода к обоснованию пригодности выпускников вузов к определенному виду профессиональной военной деятельности учитывалась успеваемость курсантов по основным категориям дисциплин, с использованием нейронной сети. Авторам пришлось столкнуться с проблемой объединения экспертных оценок по отнесению учебных дисциплин к видам профессиональной военной деятельности, к которой готовятся выпускники, освоившие программу специалитета [1, 2].

Целью данной работы является апробация и внедрение в практику известных правил комбинирования масс вероятности свидетельств при обобщении имеющихся экспертных оценок по отнесению учебных дисциплин к видам профессиональной военной деятельности.

При проведении эксперимента учитывались мнения нескольких экспертов по распределению 73 учебных дисциплин по видам профессиональной военной деятельности. При распределении дисциплин эксперты должны были учитывать условия:

- одна дисциплина может подготавливать выпускника к одной или нескольким видам профессиональной военной деятельности;
- дисциплина не может подготавливать выпускника сразу ко всем видам профессиональной военной деятельности.

Предназначенность обучающихся к видам профессиональной военной деятельности классифицирована следующим образом:

- эксплуатационная (Э);
- научно-исследовательская (НИР);
- производственно-технологическая (ПТ);
- военно-педагогическая (ВП).

В соответствии с поставленной задачей и определенными условиями каждый эксперт определял отнесение каждой учебной дисциплины к видам профессиональной военной деятельности, к которой она готовит. На основе данных, представленных экспертами, вырабатывалось общее решение, которое и учитывалось в дальнейших исследованиях. При выработке общего экспертного решения были определены три основных случая:

- мнения экспертов полностью совпали;
- мнения экспертов совпали частично;
- мнения экспертов не совпали.

В первом случае, когда мнения полностью совпали все просто и вопросов по объединению мнений не возникает.

Во втором случае, когда мнения экспертов совпали частично, для выработки общего решения можно воспользоваться правилом комбинирования Демпстера.

В третьем случае, когда мнения экспертов не совпали, для выработки общего решения правилом Демпстера пользоваться нельзя, приемле-

мыми решениями является применение правил комбинирования Ягера или Инагаки.

Ни одно из правил не дает правдоподобного агрегирования информации во всех случаях независимо от контекста. Прогностическое качество комбинирования свидетельств оценивают с помощью некоторых характеристик.

Эти характеристики можно условно разделить на: априорные и апостериорные. Априорные характеристики оценивают качество источников информации, апостериорные - результат комбинирования.

К априорным характеристикам относят, например:

- надежность источников в правиле дисконтирования;
- меру конфликтности свидетельств в правилах Демпстера, Ягера, Инагаки и др.;
- степень независимости свидетельств.

Важнейшей апостериорной характеристикой качества комбинирования является изменение количества незнания при комбинировании свидетельств. Количество незнания, содержащегося в свидетельствах, можно оценить с помощью индексов неточности, примером которых является обобщенная мера Хартли.

Рассмотрим некоторые правила комбинирования независимых свидетельств [3-5]:

а) *Правило Демпстера*. Это правило для комбинирования произвольных независимых свидетельств. Оно определяется следующим образом:

$$m_D(A) = \frac{1}{1-K} \sum_{A_1 \cap A_2 = A} m_{g_1}(A_1)m_{g_2}(A_2), \quad A \neq \emptyset, m_D(\emptyset) = 0, \quad (1)$$

$$K = K(g_1, g_2) = \sum_{A_1 \cap A_2 = \emptyset} m_{g_1}(A_1)m_{g_2}(A_2). \quad (2)$$

Величина $K(g_1, g_2)$ характеризует количество конфликта в двух источниках информации, которые задаются с помощью тел свидетельств $F(g_1)$ и $F(g_2)$. Если $K(g_1, g_2) = 1$, то это означает, что источники информации абсолютно конфликтны и правило Демпстера не может быть применено.

б) *Правило комбинирования Ягера*. Это правило определяется следующим образом:

$$g(A) = \sum_{A_1 \cap A_2 = A} m_{g_1}(A_1)m_{g_2}(A_2), \quad A \in 2^X, \quad (3)$$

$m_Y(A) = g(A), A \neq \emptyset, X, m_Y(\emptyset) = g(\emptyset) = K, m_Y(X) = m_Y(\emptyset) + g(X), (4)$
 где значение $K = K(g_1, g_2)$ определяется так же, как и в (2).

Значение $g(X) = m_{g_1}(X)m_{g_2}(X)$ характеризует количество незнания в двух телах свидетельств $F(g_1)$ и $F(g_2)$. Поэтому, правило Ягера использует информацию о конфликте (значение $g(\emptyset) = K$) и незнании (значение $g(X)$) только при вычислении базовых вероятностных назначений универсального множества X . Этот подчеркивает «осторожность» этого правила. Правило Ягера будет совпадать с правилом Демпстера при комбинировании неконфликтных свидетельств ($K = 0$).

в) *Модифицированное правило комбинирования Инагаки*. Это правило определяется с помощью функции $g(A)$ и неотрицательного параметра k .

$$m_I(A) = g(A)(1 + kg(\emptyset)), A \neq X,$$

$$m_I(X) = g(X)(1 + kg(\emptyset)) + g(\emptyset)(1 + kg(\emptyset) - k),$$

где $0 \leq k \leq 1/(1 - g(\emptyset) - g(X))$.

Если $k = 0$, то мы получим правило Ягера. Если $k = 1/(1 - g(\emptyset))$, то получим правило Демпстера. Поэтому правило Инагаки использует информацию о конфликте и незнании при вычислении базовых вероятностных назначений всех множеств с коэффициентом $(1 + kg(\emptyset))$, который регулирует соотношение между конфликтом и незнанием.

Теперь рассмотрим второй случай, когда мнения экспертов совпали частично, для выработки общего решения для сравнения воспользуемся правилами Демпстера, Ягера и Инагаки. Фрагмент опросного листа приведен в табл. 1.

Таблица 1. Результаты экспертных свидетельств по отношению учебной дисциплины к видам профессиональной военной деятельности, к которым готовятся выпускники, освоившие программу специалитета

	Э	ПТ	НИР	ВП
1-е свидетельство	+	+		
2-е свидетельство		+	+	
3-е свидетельство			+	+

Массы имеющихся экспертных свидетельств (m_1, m_2), все возможные их пересечения и итоговые значения объединения свидетельств (m_3) приведены в табл. 2.

Таблица 2. Массы имеющихся экспертных свидетельств, все возможные их пересечения и итоговые значения объединения свидетельств

m_1	m_2	m_3
$m_1\{\text{Э,ПТ}\}=0,3$	$m_2\{\text{НИР,ПТ}\}=0,4$	$m_3\{\text{ПТ}\}=0,12$
$m_1\{\text{НИР,ПТ}\}=0,3$	$m_2\{\text{НИР,ВП}\}=0,6$	$m_3\{\text{НИР}\}=0,18$
$m_1\{\text{НИР,ВП}\}=0,4$	$m_2\{\text{НИР,ПТ}\}=0,4$	$m_3\{\text{НИР}\}=0,16$
$m_1\{\text{Э,ПТ}\}=0,3$	$m_2\{\text{НИР,ВП}\}=0,6$	$m_3\{\emptyset\}=0,18$
$m_1\{\text{НИР,ПТ}\}=0,3$	$m_2\{\text{НИР,ПТ}\}=0,4$	$m_3\{\text{НИР,ПТ}\}=0,12$
$m_1\{\text{НИР,ВП}\}=0,4$	$m_2\{\text{НИР,ВП}\}=0,6$	$m_3\{\text{НИР,ВП}\}=0,24$

В результате объединения экспертных свидетельств образовались, в том числе и пустые множества (\emptyset), поэтому необходимо использование нормализующего множителя. Проведем расчет окончательных значений полученных масс с учетом рассчитанного значения нормализующего множителя. Зная граничные значения нормализующего множителя, примем его значения $k = (0; 1; 1/(1 - q\{\emptyset\}))$, что соответствует соответственно правилам Ягера, Инагаки и Демпстера.

Для правила Ягера константа нормализации $k = 0$, поэтому

$$1 + kq\{\emptyset\} = 1.$$

Для правила Инагаки константа нормализации $k = 1$, поэтому

$$1 + kq\{\emptyset\} = 1 + 1 \cdot 0,18 = 1,18.$$

Для правила Демпстера константа нормализации $k = 1,21$, поэтому

$$1 + kq\{\emptyset\} = 1 + 1,21 \cdot 0,18 = 1,21.$$

Комбинированные значения масс вероятности для пересечения фокальных элементов при различных значениях константы нормализации приведены в таблице 3.

Таблица 3. Комбинированные значения масс вероятности для пересечения фокальных элементов при различных значениях константы нормализации

m_3	Ягера $k = 0$	Инагаки $k = 1$	Демпстера $k = 1,21$
$m_3\{\text{ПТ}\}=0,12$	0,12	0,14	0,145
$m_3\{\text{НИР}\}=0,34$	0,34	0,40	0,41
$m_3\{\text{НИР,ПТ}\}=0,12$	0,12	0,14	0,145
$m_3\{\text{НИР,ВП}\}=0,24$	0,24	0,28	0,29

Из полученных результатов, приведенных в табл. 2, 3, можно заключить:

- комбинированное значение массы вероятности (по правилу Ягера) для $m_3\{\text{ПТ}\}$ составило 0,12;
- комбинированное значение массы вероятности (по правилу Ягера) для $m_3\{\text{НИР}\}$ составило 0,34;
- комбинированное значение массы вероятности (по правилу Ягера) для $m_3\{\text{НИР,ПТ}\}$ составило 0,12;
- комбинированное значение массы вероятности (по правилу Ягера) для $m_3\{\text{НИР,ВП}\}$ составило 0,24;
- масса пустого множества составила $\{\emptyset\}=0,18$, что свидетельствует о низкой степени конфликта между имеющимися свидетельствами;

Различия между комбинированными значениями масс вероятности, рассчитанных по разным правилам, незначительно, что свидетельствует о возможности применения любого из них, в зависимости от имеющихся априорных и апостериорных характеристик.

Отранжируем полученные величины комбинированных значений масс вероятности для каждой из дисциплин

$$\text{НИР} > \text{ВП} \geq \text{ПТ}.$$

Полученные результаты являются основой для выработки общего решения в случае, когда мнения экспертов совпали частично.

Теперь рассмотрим третий случай, когда экспертные свидетельства находятся в значительном противоречии. Для выработки общего решения для сравнения опять воспользуемся правилами Демпстера, Ягера и Инагаки. Фрагмент опросного листа приведен в табл. 4.

Таблица 4. Результаты экспертных свидетельств по отнесению учебной дисциплины к видам профессиональной военной деятельности, к которым готовятся выпускники, освоившие программу специалитета

	Э	ПТ	НИР	ВП
1-й эксперт	+	+		
2-й эксперт	+	+		
3-й эксперт			+	+

Массы имеющихся экспертных свидетельств (m_1, m_2), все возможные их пересечения и итоговые значения объединения свидетельств (m_3) приведены в табл. 5.

Таблица 5. Массы имеющихся экспертных свидетельств, все возможные их пересечения и итоговые значения объединения свидетельств

m_1	m_2	m_3
$m_1\{\text{Э,ПТ}\}=0,9$	$m_2\{\text{Э,ПТ}\}=0,1$	$m_3\{\text{Э,ПТ}\}=0,09$
$m_1\{\text{НИР,ВП}\}=0,1$	$m_2\{\text{НИР,ВП}\}=0,9$	$m_3\{\text{НИР,ВП}\}=0,09$
$m_1\{\text{Э,ПТ}\}=0,9$	$m_2\{\text{НИР,ВП}\}=0,9$	$m_3\{\emptyset\}=0,81$
$m_1\{\text{НИР,ВП}\}=0,1$	$m_2\{\text{Э,ПТ}\}=0,1$	$m_3\{\emptyset\}=0,01$

В результате объединения экспертных свидетельств образовались, в том числе и пустые множества (\emptyset), поэтому необходимо использование нормализующего множителя. Проведем расчет окончательных значений полученных масс с учетом рассчитанного значения нормализующего множителя. Зная граничные значения нормализующего множителя, примем его значения $k = (0; 1; 1/(1 - q\{\emptyset\}))$, что соответствует соответственно правилам Ягера, Инагаки и Демпстера.

Для правила Ягера константа нормализации $k = 0$, поэтому

$$1 + kq\{\emptyset\} = 1.$$

Для правила Инагаки константа нормализации $k = 1$, поэтому

$$1 + kq\{\emptyset\} = 1 + 1 \cdot 0,82 = 1,82.$$

Для правила Демпстера константа нормализации $k = 5,5$, поэтому

$$1 + kq\{\emptyset\} = 1 + 5,5 \cdot 0,82 = 5,51.$$

Комбинированные значения масс вероятности для пересечения фокальных элементов при различных значениях константы нормализации приведены в табл. 6.

Таблица 6. Комбинированные значения масс вероятности для пересечения фокальных элементов при различных значениях константы нормализации

	Ягера $k = 0$	Инагаки $k = 1$	Демпстера $k = 5,5$
$m_3\{\mathcal{E}, \text{ПТ}\} = 0,09$	0,09	0,16	0,41
$m_3\{\text{НИР}, \text{ВП}\} = 0,09$	0,09	0,16	0,41

Из полученных результатов, приведенных в табл. 5, 6, можно заключить:

- комбинированное значение массы вероятности по правилу Ягера для $m_3\{\mathcal{E}, \text{ПТ}\}$ и $\{\text{НИР}, \text{ВП}\}$ составило 0,09 и 0,41 по правилу Демпстера;
- масса пустого множества составила $\{\emptyset\} = 0,82$, что свидетельствует о высокой степени конфликта между имеющимися свидетельствами;

Различия между комбинированными значениями масс вероятности, рассчитанных по разным правилам, велико, что свидетельствует о невозможности применения правила Демпстера, а в зависимости от имеющихся априорных и апостериорных характеристик могут быть применены правила Ягера или Инагаки.

Отранжируем полученные величины комбинированных значений масс вероятности для каждого множества дисциплин

$$\mathcal{E}, \text{ПТ} \geq \text{НИР}, \text{ВП}.$$

Полученные результаты являются основой для выработки общего решения в случае, когда мнения экспертов значительно расходятся.

Отметим некоторые особенности применения правил комбинирования свидетельств:

- использование дисконтирования даже при очень малых значениях $\alpha \in [0,1]$ делает коэффициент K в правиле комбинирования Демпстера не равным 1 и, следовательно, позволяет всегда найти комбинированную оценку независимо от количества противоречивой информации;

- вместо нормализации с учетом противоречивости источников, как это было сделано в правиле комбинирования Демпстера, Ягер переносит противоречивость, или конфликтность, свидетельств на все множество (Ω) . При этом базовая вероятность $m_{\text{Yag}}(\Omega)$ может теперь интерпретироваться как степень незнания или неопределенности;

- правило Инагаки применяется в случае отсутствия какой-либо информации об источниках. Кроме этого, правило Инагаки допускает изме-

нение значения константы нормализации в пределах $0 \leq k \leq 1/(1 - q\{\emptyset\})$, что позволяет в зависимости от его значений учитывать или не учитывать конфликты на множестве гипотез.

Для анализа зависимости величины комбинирования свидетельств от массы пустого множества были проведены расчеты при различных значениях $m_1\{\emptyset, ПТ\} = \{0,1; 0,5\}$ и $m_2\{\text{НИР, ВП}\} = \{0,9; 0,5\}$. На рис. 1, 2 представлены зависимости величины комбинирования свидетельств от массы пустого множества, образующегося при пересечении множеств $m_1\{\emptyset, ПТ\}$ и $m_2\{\text{НИР, ВП}\}$, рассчитанных по правилам: 1) Демпстера, 2) Инагаки, 3) Ягера).

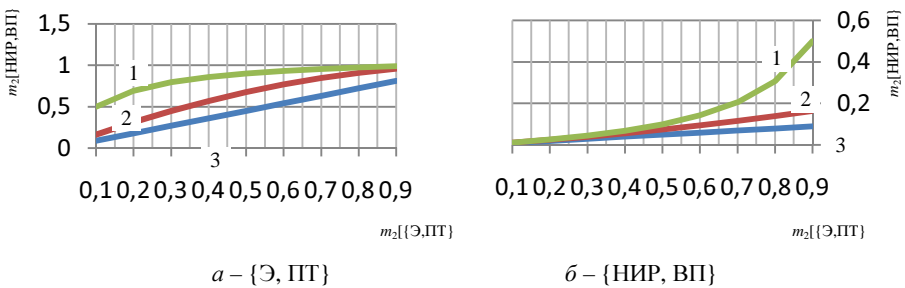


Рис. 1. Зависимость величины комбинирования свидетельств от массы пустого множества при $m_1\{\emptyset, ПТ\}=0,1, m_2\{\text{НИР, ВП}\}=0,9$

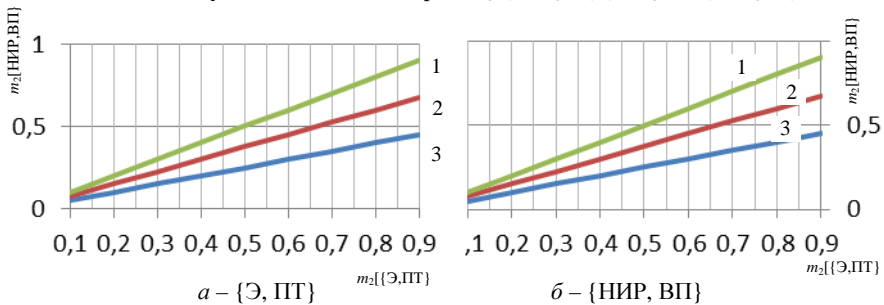


Рис. 2. Зависимость величины комбинирования свидетельств от массы пустого множества при $m_1\{\emptyset, ПТ\}=0,5, m_2\{\text{НИР, ВП}\}=0,5$

Из зависимостей, приведенных на рис. 1 и 2, видно, что величина комбинирования свидетельств, полученных по правилу Демпстера, при больших значениях массы пустого множества значительно отличается от результатов, полученных по правилам Ягера и Инагаки. Величина комби-

нирования свидетельств при малых значениях массы пустого множества незначительно отличается от других результатов. Зависимости, рассчитанные по правилам Ягера и Демпстера, по сути, являются граничными условиями для правила Инагаки.

Таким образом, проведена количественная оценка наиболее распространённых случаев, встречающихся при расчете комбинированных значений масс вероятности для пересечения фокальных элементов.

Рассмотрены случаи прикладного применения наиболее распространённых правил Ягера, Инагаки и Демпстера для оценки комбинированных значений масс вероятности имеющих свидетелей.

Апробированы и внедрены в практику известные правила комбинирования масс вероятности свидетельств Ягера, Инагаки и Демпстера, при обобщении имеющих экспертных оценок по отнесению учебных дисциплин к видам профессиональной военной деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Казаров Е.Г.* Научное обоснование пригодности выпускника к определенному виду военной деятельности / Е.Г. Казаров, А.М. Рудаков, Т.И. Коваленко // Воронеж: Вестник ЯВВУПВО, 2017. 7 с.
2. *Казаров Е. Г.* Обобщение экспертных оценок в условиях неопределённости / Е.Г. Казаров, А.М. Рудаков, А.В. Новик // VI Междунар. науч.-техн. конф. «Современное состояние и перспективы развития систем связи и радиотехнического обеспечения в управлении авиацией»: сб. науч. ст. Воронеж, 2017. 5 с.
3. *Dempster A P.* A generalization of Bayesian inference / A.P. Dempster // Journal of the Royal Statistical Society. 1968. Vol. 30. P. 205–247.
4. *Shafer G.* A Mathematical Theory of Evidence. Princeton: Princeton University Press, 1976. 297 p.
5. *Уткин Л.В.* Анализ риска и принятие решений при неполной информации. СПб.: Наука. 2007. 404 с.

УДК 621.92:519.217

**А. Б. Капранова, И. И. Верлока, М. Ю. Таршис,
С. Н. Черпицкий**

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: kapranova_anna@mail.ru

О РАЗЛИЧНЫХ ФОРМАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА ПРИ ОПИСАНИИ СМЕШИВАНИЯ СЫПУЧИХ СРЕД В РАЗРЕЖЕННЫХ ПОТОКАХ

В работе кратко представлена классификация основных видов случайных марковских процессов и приведены способы формирования различных интерпретаций кинетического уравнения типа Фоккера-Планка при получении смеси сыпучих компонентов в разреженных потоках.

Ключевые слова: смешивание, сыпучие компоненты, случайный процесс, кинетическое уравнение, макромасштабные флуктуации, стохастическая энергия.

A. B. Kapranova, I. I. Verloka, M. U. Tarshis, C. N. Cherpitskij

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: kapranova_anna@mail.ru

ABOUT VARIOUS FORMS OF REPRESENTATION OF THE FOKKER-PLANCK EQUATION FOR DESCRIBING OF MIXING OF BULK MATERIALS IN RAREFACTION FLOWS

The paper briefly presents the classification of the main types of random Markov processes and gives methods for obtaining various interpretations of the kinetic equation of the Fokker-Planck type in obtaining a mixture of bulk components in sparse streams.

Keywords: mixing, bulk components, random process, kinetic equation, macro-scale fluctuations, stochastic energy.

В последнее время марковские процессы (когда переход от состояния системы в некоторый момент времени в последующее не зависит от предыстории и определяется только мгновенными состояниями) традиционно используются при стохастическом моделировании технологических операций по переработке твердых дисперсных сред. Кинетическое уравнение типа Фоккера-Планка является одним из основных при описании гауссовского случайного процесса, когда первый и второй моменты частоты

переходов отличны от нуля в разложении Крамерса-Мойала (Van Kampen N. G. [1], Дж. Кайзер [2], Г. Рёнке [3]) относительно плотности вероятности для непрерывного процесса. Заметим, что непрерывные гауссовские процессы условно можно классифицировать на процессы Виннера и Орнштейна-Уленбека. Первый класс относится к нестационарным процессам с нулевым значением первого момента и постоянным значением второго момента для частоты переходов, описывающим диффузионные эффекты. Второй класс - к стационарным процессам с меняющимся по линейному закону первым моментом частоты переходов относительно состояния системы и постоянным значением второго момента, которые описывают как диффузионные, так и флуктуационные изменения состояния системы.

Формирование математической модели технологической операции смешивания сыпучих компонентов в разреженных потоках может быть выполнено с различных позиций марковского случайного процесса - равновесного и неравновесного соответственно в пренебрежении [4-6] макромасштабными флуктуациями состояний системы и при их учете [7-10].

Усреднение динамических распределений по гиббсовскому ансамблю, в частности, по гамильтоновым координатам и импульсам частиц из набора одинаковых микросистем (частиц) приводит к «сглаживанию» мелкомасштабных флуктуаций состояний и введению ланжевеновского источника крупномасштабных флуктуаций [7].

Остановимся на примере описания неравновесного случая, когда наблюдаются столкновения между частицами двух сортов из сформированных разреженных потоков с помощью двух барабанных конструкций со щеточными элементами, закрепленными по винтовым линиям противоположных направлений. Указанные барабаны вращаются с угловой скоростью ω . Рассмотрим движение частиц двух сортов из разреженных потоков после взаимодействия с деформированными щеточными элементами в поперечном сечении барабанов в элементе фазового объема $d\psi_{ij} = dV_{xij}dV_{yij}$ в декартовой системе координат или в полярной $d\psi_{ij} = \omega^2 r_{ij}^2 dr_{ij} d\varphi_{ij}$. Здесь радиальная координата r_{ij} отсчитывается от центра сечения барабана, а угловая φ_{ij} - от оси абсцисс до радиус-вектора центра масс частицы i -той компоненты ($i = 1, 2$) при срыве с j -го деформированного щеточного элемента ($j = \overline{1, n_b}$). Общий вид стохастической энергии одиночной частицы записывается следующим образом

$$E_{ij} = g_{1ij} V_{xij}^2 + g_{2ij} V_{yij}^2, \quad (1)$$

где коэффициенты g_{1ij}, g_{2ij} зависят только от конструктивных параметров рабочего объема смесителя и физико-механических характеристик частиц смешиваемых компонентов.

Выполнив переход к полярным координатам r_{ij} и φ_{ij} в выражении (1), получим новое представление для стохастической энергии

$$E_{ij} = G_{1ij} r_{ij}^2 + G_2 \varphi_{ij}^2, \quad (2)$$

где параметр $G_2 = \text{const}$ связан только с коэффициентом угловой жесткости щеточных элементов.

В таком случае запись кинетического уравнения типа Фоккера-Планка относительно неравновесной функции распределения частиц разреженных потоков $f_{ij}(t, V_{xij}, V_{yij})$ аналогична формированию описания движения броуновских осцилляторов [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ij}(t, V_{xij}, V_{yij})}{\partial t} = & D_{1ij} \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial V_{xij}^2} + D_{2ij} \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial V_{yij}^2} + \eta_{1ij} \frac{\partial(V_{xij} f_{ij})}{\partial V_{xij}} + \eta_{2ij} \frac{\partial(V_{yij} f_{ij})}{\partial V_{yij}} + \\ & + \xi_{1ij} \frac{\partial(V_{xij} E_{ij} f_{ij})}{\partial V_{xij}} + \xi_{2ij} \frac{\partial(V_{yij} E_{ij} f_{ij})}{\partial V_{yij}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда применяя соотношения

$$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial V_{xij}} = -(\omega r_{ij})^{-1} \sin \varphi_{ij}, \quad \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial V_{yij}} = (\omega r_{ij})^{-1} \cos \varphi_{ij}, \quad (4)$$

с учетом (2) и (3) в полярной системе координат для формы неравновесной функции распределения частиц разреженных потоков $\tilde{f}_{ij}(t, r_{ij}, \varphi_{ij})$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_{ij}(t, r_{ij}, \varphi_{ij})}{\partial t} = & D_{1ij} \left\{ \cos^2 \varphi_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{f}_{ij}}{\partial r_{ij}^2} + \frac{\sin^2 \varphi_{ij}}{r_{ij}} \left[\frac{\partial \tilde{f}_{ij}}{\partial r_{ij}} + \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial^2 \tilde{f}_{ij}}{\partial \varphi_{ij}^2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\sin 2\varphi_{ij}}{r_{ij}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{f}_{ij}}{\partial r_{ij} \partial \varphi_{ij}} - \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial \tilde{f}_{ij}}{\partial \varphi_{ij}} \right] \right\} + D_{2ij} \left\{ \sin^2 \varphi_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{f}_{ij}}{\partial r_{ij}^2} + \frac{\cos^2 \varphi_{ij}}{r_{ij}} \times \right. \\ & \times \left[\frac{\partial \tilde{f}_{ij}}{\partial r_{ij}} + \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial^2 \tilde{f}_{ij}}{\partial \varphi_{ij}^2} \right] + \frac{\sin 2\varphi_{ij}}{r_{ij}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{f}_{ij}}{\partial r_{ij} \partial \varphi_{ij}} - \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial \tilde{f}_{ij}}{\partial \varphi_{ij}} \right] \left. \right\} + (\eta_{1ij} + \eta_{2ij}) \tilde{f}_{ij} + \\ & + \eta_{1ij} \left[\cos \varphi_{ij} \frac{\partial \tilde{f}_{ij}}{\partial r_{ij}} - \frac{\sin \varphi_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial \tilde{f}_{ij}}{\partial \varphi_{ij}} \right] + \eta_{2ij} \left[\sin \varphi_{ij} \frac{\partial \tilde{f}_{ij}}{\partial r_{ij}} - \frac{\cos \varphi_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial \tilde{f}_{ij}}{\partial \varphi_{ij}} \right] + \\ & + (\xi_{1ij} + \xi_{2ij}) \tilde{f}_{ij} + \xi_{1ij} \left[\cos \varphi_{ij} \frac{\partial(E_{ij} \tilde{f}_{ij})}{\partial r_{ij}} - \frac{\sin \varphi_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial(E_{ij} \tilde{f}_{ij})}{\partial \varphi_{ij}} \right] + \\ & + \xi_{2ij} \left[\sin \varphi_{ij} \frac{\partial(E_{ij} \tilde{f}_{ij})}{\partial r_{ij}} - \frac{\cos \varphi_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial(E_{ij} \tilde{f}_{ij})}{\partial \varphi_{ij}} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнениях (3) и (5) параметры кинетического уравнения D_{kij} , η_{kij} , ζ_{kij} , ($k = 1, 2$) функционально связаны с основными характеристиками процесса смешивания сыпучих компонентов: E_{0ij} - энергией стохастизации системы и E_{fij} - потерей энергии при столкновениях частиц из разносортных разреженных потоков [11].

Однако для практических приложений наиболее удобной формой кинетического уравнения типа Фоккера-Планка считается следующее представление, получаемое из (3) или (5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}_{ij}(t, r_{ij}, \varphi_{ij})}{\partial t} = & \left(\frac{dE_{0ij}}{dt} \frac{dE_{fij}}{dt} \right)^{1/2} \left[\left(E_{ij} \frac{\partial^2 \bar{f}_{ij}}{\partial E_{ij}^2} + \frac{\partial \bar{f}_{ij}}{\partial E_{ij}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{E_{0ij}} \left(E_{ij} \frac{\partial \bar{f}_{ij}}{\partial E_{ij}} + \bar{f}_{ij} \right) + \frac{1}{E_{fij}^2} \left(E_{ij}^2 \frac{\partial \bar{f}_{ij}}{\partial E_{ij}} + E_{ij} \bar{f}_{ij} \right) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

или

$$\frac{\partial \bar{f}_{ij}(t, E_{ij})}{\partial t} = \left(\frac{dE_{0ij}}{dt} \frac{dE_{fij}}{dt} \right)^{1/2} \left[\frac{\partial}{\partial E_{ij}} \left(E_{ij} \frac{\partial \bar{f}_{ij}}{\partial E_{ij}} \right) + \frac{1}{E_{0ij}} \frac{\partial (E_{ij} \bar{f}_{ij})}{\partial E_{ij}} + \frac{1}{E_{fij}^2} \frac{\partial (E_{ij}^2 \bar{f}_{ij})}{\partial E_{ij}} \right], \quad (7)$$

где согласно [8, 9, 11] получена связь между параметрами процесса смешивания

$$D_{1ij} = (4G_{1ij})^{-1} \left(\frac{dE_{0ij}}{dt} \frac{dE_{fij}}{dt} \right)^{1/2}, \quad D_{2ij} = (4G_{2ij})^{-1} \left(\frac{dE_{0ij}}{dt} \frac{dE_{fij}}{dt} \right)^{1/2}, \quad (8)$$

$$\eta_{1ij} = \eta_{2ij} = (2E_{0ij})^{-1} \left(\frac{dE_{0ij}}{dt} \frac{dE_{fij}}{dt} \right)^{1/2}, \quad \zeta_{1ij} = \zeta_{2ij} = (2E_{0ij})^{-1} \left(\frac{dE_{0ij}}{dt} \frac{dE_{fij}}{dt} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Заметим, что обсуждение режимов состояния разреженных частиц каждого потока i -го сыпучего компонента при срыве с j -го щеточного элемента на основе [7] выполнено в работе [12]. Согласно [12] существенные случайные флуктуации приводят к потере энергии макросистемой частиц разреженных потоков с переходом в состояние новой стационарной структуры (в состоянии регенерации) при возможном прогнозе ее эволюции на выбранном участке управляющего параметра.

Таким образом, получено энергетическое представление кинетического уравнения Фоккера-Планка (7) в случае смешивания сыпучих компонентов в разреженных потоках при взаимодействии со щеточными элементами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Van Kampen N.G.* Stochastic Processes in Physics and Chemistry. Amsterdam, New York, Oxford : North-Holland Publ. Co. 1984.
2. *Кайзер Дж.* Статистическая термодинамика неравновесных процессов / пер. с англ. А.Г. Башкирова под ред. В.Г. Морозова. М.: Мир, 1990. 608 с.
3. *Рётке Г.* Неравновесная статистическая механика / пер. с нем. С.В. Тищенко под ред. Д.Н. Зубарева. М.: Мир, 1990. 320 с.
4. *Капранова А.Б.* Стохастическое описание движения осветленной фракции суспензии порошков / А.Б. Капранова, А.Е.Лебедев, Д.О. Бытев, А.И. Зайцев // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. Иваново, 2004. Т. 47, вып. 6. С. 99-101.
5. *Капранова А.Б.* Исследование ударного смешивания твердых дисперсных сред при вторичных столкновениях частиц / А.Б. Капранова, М.Н. Бакин, А.Е. Лебедев, А.И. Зайцев // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. Иваново, 2013. Т. 56, вып. 6. С. 83-86.
6. *Бакин М. Н.* Исследование распределения сыпучих компонентов в рабочем объеме барабанно-ленточного смесителя [Электронный ресурс] / М.Н. Бакин, А.Б. Капранова, И.И. Верлока // Фундаментальные исследования. № 5 (ч. 5), 2014. С. 928-933. Режим доступа: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10003288
7. *Климонтович Ю.Л.* Турбулентное движение и структура хаоса: Новый подход к статистической теории открытых систем. М.: ЛЕНАНД, 2014. 328 с.
8. *Капранова А.Б.* Об оценке содержания ключевого компонента после ударного рассеивания сыпучих материалов на начальном этапе порционного смешивания / А.Б. Капранова, И.И. Верлока // Вестник ИГЭУ. № 3. 2016. С. 78-83. (DOI) 10.17588/2072-2672.2016.3.078-083.
9. *Kapranova A.B.* The model of dispersion of particles during their flow from chipping the surface / A.B. Kapranova, I. I. Verloka, A.E. Lebedev, A.I. Zaitzev // Czasopismo techniczne. Mechanika. Krakov, Poland, 2016. V. 113, № 2. P. 145-150.
10. *Kapranova A. B.* The study of the volume fraction of key component in the second phase of the portion mixing by means of the device of gravity type / A. B. Kapranova, I.I. Verloka // Chemical Engineering -2017 : 3rd International Conference on Chemical Engineering (October 2-4, 2017). Chicago, Illinois, USA, 2017. V. 8, № 5. P. 59.
11. *Капранова А. Б.* Сравнительный анализ равновесных и неравновесных функций распределения смешиваемых сыпучих сред / А.Б. Капранова, И.И. Верлока, А.И. Зайцев // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-28: сб. тр. 28-й Междунар. науч. конф. В 12 т. Т. 8. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2015. С. 223-227.
12. *Капранова А.Б.* Сопоставление кинетических уравнений в стохастических моделях смешивания сыпучих сред / А.Б. Капранова, И.И. Верлока, А.И. Зайцев // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-28: сб. тр. 28-й Междунар. науч. конф. в 12 т. Т. 8. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2015. С. 241-246.

УДК 621.891: 621.026

Л. В. Королев, Д. О. Бытев

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: korolevlv@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ СУПЕРДИФфуЗИОННОГО ПРОЦЕССА В СРЕДЕ С ОТРАЖАЮЩИМИ ГРАНИЦАМИ

Для описания процесса супердиффузионного переноса предложена система кинетических уравнений в расширенном фазовом пространстве с граничными условиями, учитывающими поглощение и отражение частиц.

Ключевые слова: блуждания с непрерывным временем, кинетические уравнения, супердиффузия.

L. V. Korolev, D. O. Bytev

*Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: korolevlv@mail.ru*

MODELING OF SUPERDIFFUSION PROCESS IN A MEDIUM WITH REFLECTING BOUNDARIES

A system of kinetic equations in the extended phase space is proposed to describe the superdiffusion transfer process. Boundary conditions take into account the absorption and reflection of the particles.

Keywords: CTRW, kinetic equations, superdiffusion.

Во многих научных и технических приложениях для описания случайного транспорта частиц используются модели процесса супердиффузии. В таких процессах частица совершает непрерывно следующие друг за другом случайные перемещения в некоторой среде, причем характерный пространственный масштаб одного перемещения не мал по сравнению с размером среды, как в случае классической диффузии, а сопоставим с ним.

Для нахождения кинетических уравнений супердиффузии обычно применяется метод случайных блужданий с непрерывным временем (Continuous Time Random Walks - CTRW) [1]. В основе метода лежит разложение плотности вероятности $f(x, t)$ нахождения частицы в точке пространства x в сумму по числу случайных перемещений, совершенных частицей к моменту наблюдения t . При этом движение частицы в процессе еди-

ничного перемещения, начавшегося в момент t' в точке x' , определяется заданными распределениями по координате $W(x|x', t-t')$ и длительности перемещения $T(t-t')$. Полученное таким методом кинетическое уравнение может быть записано в виде

$$f(x, t) = \int dx' W(x|x', t) \left(1 - \int_0^t dt' T(t') \right) f_0(x') + \int_0^t dt' \int dx' W(x|x', t-t') T(t-t') f(x', t'), \quad (1)$$

где $f_0(x)$ - плотность распределения в начальный момент времени, а символ $\int dx$ обозначает интегрирование по всей области движения частицы. Если скорость частицы при перемещении не меняется, то характер процесса, описываемого уравнением (1), определяется средней длительностью случайного перемещения $\langle t \rangle = \int_0^\infty T(t) dt$. При конечном $\langle t \rangle$ процесс на временах $t \gg \langle t \rangle$ переходит в режим классической диффузии, а при бесконечном $\langle t \rangle$ (например, $T(t) \sim t^{-(1+\gamma)}$ при $t \rightarrow \infty$ и $0 < \gamma < 1$) уравнение (1) описывает супердиффузионный транспорт частиц.

Нелокальное по времени и по пространственной координате кинетическое уравнение типа (1) удобно для анализа супердиффузионного процесса, протекающего в бесконечной среде. Если же среда, в которой перемещается частица, конечна и на границах среды происходит отражение и поглощение частиц, то описание процесса с помощью уравнения (1) становится затруднительным. Дело в том, что в режиме супердиффузионного транспорта частица, начав движение в любой точке внутри среды, может с большой вероятностью в течение одного случайного перемещения достичь границы. При наличии сильного внутреннего отражения частица за одно случайное перемещение будет достигать границ многократно. Это обстоятельство делает определение входящей в (1) плотности W сложной задачей, сравнимой по трудоемкости с решением самого уравнения (1).

В настоящей работе предлагается локальное по времени и пространству кинетическое уравнение случайного транспорта частиц. Для получения такого уравнения добавим в описание процесса дополнительную координату $\tau \geq 0$ определяющую время, прошедшее с начала последнего случайного перемещения частицы. Этот процесс в расширенном фазовом пространстве (x, τ) становится марковским [2, 3] и может быть описан следующим образом. В каждый малый промежуток времени $(t, t + dt)$ час-

тица,двигающаяся в некотором направлении со скоростью, равной по абсолютной величине v_0 , и находящаяся в момент t в точке (x', τ') , либо с вероятностью $1 - q(\tau')dt$ продолжает движение в том же направлении, либо с вероятностью $q(\tau')dt$ останавливается и выбирает новое направление движения. В первом случае ее координата x' изменяется на величину v_0dt в направлении движения, а координата τ увеличивается на dt . Во втором случае координата x' не изменяется, а τ становится равным нулю. Величина $q(\tau')dt$ есть вероятность того, что в малом интервале $(\tau', \tau' + dt)$ очередное случайное перемещение закончится, вычисленная в предположении, что в интервале $(0, \tau')$ это перемещение продолжалось. Функция $q(\tau)$ определяется выражением

$$q(\tau) = T(\tau) / \left(1 - \int_0^\tau T(\tau') d\tau' \right). \quad (2)$$

Рассмотрим одномерный случайный транспорт частиц вдоль оси x . Для удобства записи уравнений представим плотность распределения частиц в расширенном фазовом пространстве $f(x, \tau, t)$ в виде суммы

$$f(x, \tau, t) = f_1(x, \tau, t) + f_{-1}(x, \tau, t), \quad (3)$$

где $f_1(x, \tau, t)$ и $f_{-1}(x, \tau, t)$ - плотности распределения частиц, движущихся в положительном и отрицательном направлении оси x соответственно. Считая, что выбор каждого из возможных направлений очередного случайного перемещения равновероятен, можно записать для рассматриваемого процесса следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f_1(x, \tau, t + dt) &= (1 - q(\tau - dt)dt) f_1(x - v_0dt, \tau - dt, t) + \\ &+ dt \frac{\delta(\tau)}{2} \int_0^\infty d\tau' q(\tau') f(x, \tau', t), \\ f_{-1}(x, \tau, t + dt) &= (1 - q(\tau - dt)dt) f_{-1}(x + v_0dt, \tau - dt, t) + \\ &+ dt \frac{\delta(\tau)}{2} \int_0^\infty d\tau' q(\tau') f(x, \tau', t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция.

Проведя разложение выражений (4) по малой величине dt до членов первого порядка, легко получить систему уравнений, описывающих кинетику процесса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{\partial J}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau} + \delta(\tau) \int_0^{\infty} d\tau' q(\tau') f(x, \tau', t) - q(\tau) f, \\ \frac{\partial J}{\partial t} &= -v_0^2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial J}{\partial \tau} - q(\tau) J, \end{aligned} \quad (5)$$

где $J(x, \tau, t)$ - плотность потока частиц, определяемая выражением

$$J(x, \tau, t) = v_0(f_1(x, \tau, t) - f_{-1}(x, \tau, t)). \quad (6)$$

Начальные условия могут быть записаны в виде

$$f(x, \tau, t = 0) = f_0(x)\delta(\tau), \quad J(x, \tau, t = 0) = 0. \quad (7)$$

Система уравнений (5), (7) позволяет определить плотность $f(x, \tau, t)$ и, следовательно, распределение $f(x, t) = \int_0^{\infty} f(x, \tau, t) d\tau$.

Для решения системы кинетических уравнений (5), (7) в случае ограниченной среды, необходимо задать режим транспорта частиц на границах. Границы могут поглощать частицы либо отражать их обратно внутрь среды. На правой границе среды при $x = x_r$ должно выполняться условие, связывающее падающий на границу и отраженный от нее потоки частиц: $v_0 f_{-1}(x = x_r, \tau, t) = \int_0^{\infty} R_r(\tau | \tau') v_0 f_1(x = x_r, \tau', t) d\tau'$, где $R_r(\tau | \tau')$ - дифференциальный коэффициент отражения. Частицы, не отразившиеся от границы, поглощаются на ней. С учетом (3) и (6) граничное условие принимает вид

$$\begin{aligned} v_0 f(x = x_r, \tau, t) - J(x = x_r, \tau, t) &= \\ &= \int_0^{\infty} R_r(\tau | \tau') (v_0 f(x = x_r, \tau', t) + J(x = x_r, \tau', t)) d\tau'. \end{aligned} \quad (8)$$

На левой границе при $x = x_l$ имеет место аналогичное соотношение с коэффициентом отражения $R_l(\tau | \tau')$

$$\begin{aligned} -v_0 f(x = x_l, \tau, t) - J(x = x_l, \tau, t) &= \\ &= \int_0^{\infty} R_l(\tau | \tau') (-v_0 f(x = x_l, \tau', t) + J(x = x_l, \tau', t)) d\tau'. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, в работе предложено локальное по времени и по пространственной координате кинетическое уравнение (5), (7) с граничными условиями (8) - (9), описывающее процесс супердиффузии частиц в среде с отражающими границами. Приведенный в работе метод получения кинетических уравнений и граничных условий к ним, основанный на добавлении в фазовое пространство процесса дополнительной координаты,

может использоваться для анализа других случайных процессов, протекающих в неоднородных по пространству и времени условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Королев Л.В.* Моделирование совмещенных случайных процессов / Л.В. Королев, Д.О. Бытев // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 10. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2015. С. 130–135
2. *Вентцель Е. С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит.-ры, 1988. 208 с.
3. *Королев Л.В.* Собственное время в модели случайного процесса / Л.В. Королев, Д.О. Бытев // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2016. С. 215–218.

УДК 534.6:629.113

Д. В. Лебедев¹, А. Е. Лебедев^{1,2}

¹Ярославский государственный технический университет

²Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны

Россия, г. Ярославль, e-mail: dzemitory@yandex.ru,

lae4444@mail.ru

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА АКУСТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

В статье рассматривается способ диагностики узлов и агрегатов транспортного средства акустическим методом. Приведено описание зависимостей процесса. Проведён ряд экспериментов для подтверждения целесообразности использования данного метода. Сделан вывод по результатам экспериментов.

Ключевые слова: акустическая диагностика, колебательные процессы, быстрое преобразование Фурье.

D. V. Lebedev¹, E. A. Lebedev^{1,2}

¹Yaroslavl State Technical University

²Yaroslavl Higher Military School of Air Defense

Russia, Yaroslavl, e-mail: dzemitory@yandex.ru

lae4444@mail.ru

ARGUMENTATION OF THE METHOD OF ACOUSTIC DIAGNOSTICS OF VEHICLES

The paper discusses a method of diagnosing components and assemblies of the vehicle using the acoustic method. give the description of dependencies of the process. Some experiments are carried out to confirm the feasibility of using this method. There is the conclusion from the experimental results.

Keywords: *acoustic diagnostics, oscillatory processes, fast Fourier transform.*

Из опыта многолетней практики по эксплуатации и обслуживанию автомобилей известно, что опытный механик может получить достоверную информацию о техническом состоянии транспортного средства, прибегая лишь к прослушиванию машины. Иногда возможна даже классификация дефектов. Однако нужно учитывать субъективность подобных экспертных оценок и наличие человеческого фактора. Также необходимо присутствие высококвалифицированного специалиста с опытом эксплуатации машин того или иного типа, нехватка которых имеет место как в частных автомобильных сервисах, так и в крупных производственных организациях и предприятиях.

Таким образом, стоит задача по модернизации методов акустической диагностики, которая будет заключаться в создании компьютеризированной экспертной диагностической системы распознавания шумов, которые формируются на основе акустического сигнала, предназначенной для мониторинга автомобильных транспортных средств.

Акустическая сигнатура любых узлов и агрегатов, подвергаясь износу в процессе работы, непрерывно меняется, однако обнаружить и оценить явные изменения зачастую удаётся непосредственно перед отказом. Так, известно, что подшипники, близкие к отказу по причине образования осадка на обойме, испускают характерный ноющий звук, отличающийся от нормальной сигнатуры процесса.

Акустические датчики позволяют регистрировать подобные изменения заблаговременно и гораздо раньше, нежели при использовании метода субъективного прослушивания. Программное обеспечение, работающее по определённым алгоритмам, отвечает за обработку полученных данных, а также их вывод на пользовательский интерфейс.

В качестве способа пассивной акустической диагностики выбран шумодиагностический метод, в силу особенностей как самого метода, так и диагностируемого объекта. В качестве акустических датчиков используются микрофоны ненаправленного действия. Исследование зависимостей акустических сигналов проводится на подшипниках качения с целью сужения области эксперимента и лучшей фиксации результатов.

Оценку характеристик испускаемых акустических сигналов планируется производить в вычислительном блоке за счёт мощностей установленного в нём центрального процессора. Оценочные операции будут основаны на программном коде, работающем по заданным алгоритмам.

Для понимания выбора оценочных параметров необходимо обратиться к формуле, описывающей среднюю мощность излучения волн из зоны возмущения сигнала (за средой распространения колебаний принят условный подшипник качения) [1]:

$$I = \frac{p_m^2 r_0^2}{8\pi c}, \quad (1)$$

где p_m – напряжение в центре области возмущения; r_0 – линейный размер зоны контакта; c – скорость её распространения.

Из данной формулы видно, что величина средней мощности излучения пропорциональна квадрату напряжения в зоне контакта деталей, а также пропорциональна квадрату линейного размера зоны контакта и обратно пропорциональна скорости распространения волны.

В механизмах происходит возбуждение нескольких типов волн одновременно. Они имеют разные скорости распространения. Среди колебаний преимущественно должны преобладать колебания с меньшей скоростью распространения. Частотная характеристика канала равняется спектру колебаний, возбуждаемых импульсом с бесконечно малой длительностью. Амплитуды составляющих p_m такого импульса одинаковы для всех частот. Из выражения (1) можно сделать вывод о том, что средняя мощность частотных составляющих колебания, возбуждаемого бесконечно коротким импульсом, не зависит от их частоты.

Таким образом, при захвате сигнала акустическими датчиками фактическим показателем для выявления неисправностей будет являться амплитуда, т.е. мощность сигнала.

Выявление частот нужно, чтобы произвести разделение узла или агрегата на кинематические пары с целью проведения сканирования кинематических пар на наличие отклонений в амплитудном спектре, что позволит минимизировать количество датчиков.

Возможной проблемой может стать перекрытие частотного диапазона, что заставит прибегнуть к иным алгоритмам поиска и обнаружения конкретных кинематических пар. Данная тема требует дополнительных исследований.

Однако стоит отметить, что длительность соударений для кинематических пар неодинакова, а значит, максимум спектра сигналов, посылаемых разными кинематическими парами, так же приходится на разные частоты. Данное обстоятельство можно использовать для разделения захватываемых сигналов.

Таким образом, требуется получить данные по амплитуде и частоте акустического сигнала. Для определения амплитудно-частотной характе-

ристики и зависимостей можно использовать преобразование Фурье. Операция преобразования Фурье сопоставляет две функции вещественных переменных. Новая функция описывает коэффициенты, в качестве которых выступают значения амплитуд, при разложении исходной функции на элементарные составляющие – гармонические колебания с разными частотами.

В некоторых исследованиях также прибегают к вейвлет-преобразованию, которое переводит сигнал из временного представления в частотно-временное. В некоторых случаях такой анализ более информативен, однако проведение его применительно к сигналам звукового диапазона нецелесообразно.

В качестве математической модели будет рассматриваться модель преобразования Фурье, а именно быстрое преобразование Фурье. Причём алгоритмы преобразования Фурье фактически будут являться частью любого устройства для захвата и обработки акустического сигнала.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) служит в качестве инструмента спектрального анализа сигналов, и получило довольно широкое распространение.

Для построения амплитудно-частотной характеристики предлагается использовать быстрый Фурье-анализ (быстрое преобразование Фурье), реализованный в пакете программ математического моделирования MATLAB.

В используемой реализации возможно чтение и анализ записанных сэмплов акустического сигнала из файла длительностью до одной секунды. Таким образом, из записи акустического сигнала, полученной в ходе эксперимента, следует вырезать фрагмент длительностью до одной секунды. Фрагмент следует выбирать на временном участке со стабильными амплитудными показателями.

Следует отметить, что реализация алгоритмов Фурье-анализа может быть подвергнута изменениям под требуемые нужды. Так, возможен анализ потокового акустического сигнала. Также возможна реализация на иных языках программирования, в различных средах и программных пакетах.

На рис. 1–3 представлены результаты Фурье-анализа по трём поставленным экспериментам. Эксперименты проводились путём прослушивания и записи акустических сигналов (шумов) исправного и идентичного неисправного механизма. Обработка полученных данных осуществлялась в пакете программ математического моделирования MATLAB. Для каждого из экспериментов приводится Фурье-анализ исправного и неисправного механизма.

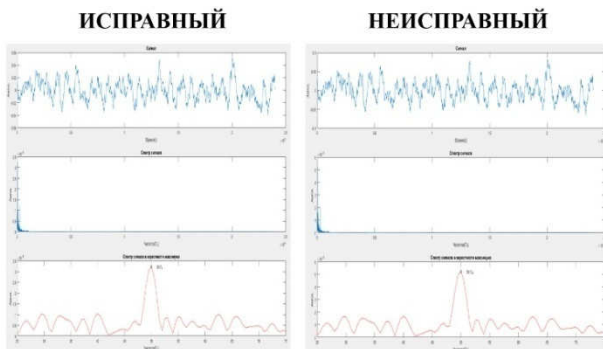


Рис. 1. Анализ результатов эксперимента (кулер Gembird)

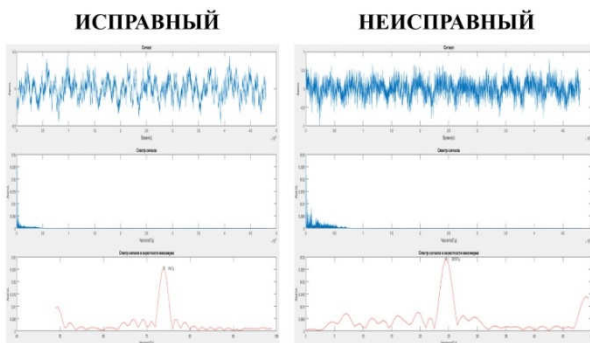


Рис. 2. Анализ результатов эксперимента (выжимной подшипник автомобиля Renault Traffic)

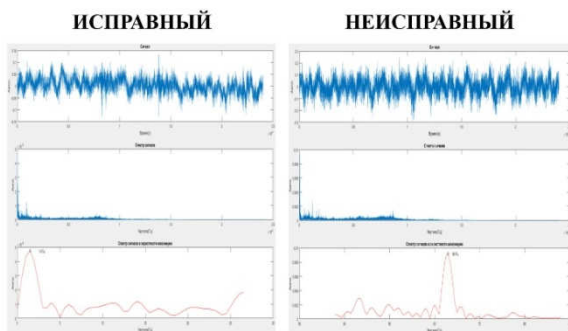


Рис. 3. Анализ результатов эксперимента (ступичный подшипник автомобиля Nissan Qashqai)

Как показал спектральный анализ, применённый метод пассивной акустической диагностики смог идентифицировать отклонения в акустическом сигнале, проявившиеся в ходе износа механизма. Также подтвердилась прямо пропорциональная зависимость степени износа и увеличения амплитуд акустического сигнала.

Зависимости по частотам не обнаружилось, однако были выявлены частоты, которым принадлежит амплитудный максимум, что в дальнейшем можно использовать для идентификации типа, характера и места локализации неисправных участков или элементов механизма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлов Б.В. Акустическая диагностика механизмов. М.: Машиностроение, 1971. 224 с.
2. Ермолов И.Н. Неразрушающий контроль. В 5 кн. Кн. 2. Акустические методы контроля: практ. пособие / И.Н. Ермолов, Н.П. Алешин, А.И. Потапов; под ред. В.В. Сухорукова. М.: Высш. шк., 1991. 283 с.
3. Виноградов А.Ю. Мониторинг ходовой части локомотивов на основе метода акустической эмиссии / А.Ю. Виноградов, С.Г. Лазарев, А.А. Кибкало, А.В. Шведов // Евразия Вести. 2012. Январь. С. 13.
4. Камышов С.С. Исследование акустических сигналов, излучаемых автомобильным транспортом // Изв. ЮФУ. Техн. науки. 2011. №3. С. 187-194.

УДК 517.95:532.3

В. А. Наумов

Калининградский государственный технический университет,
Россия, г. Калининград, e-mail: van-old@mail.ru

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ ГРУЗА НА ТРОСЕ В ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ

Разработана усовершенствованная версия метода численного решения трехмерной задачи равновесия груза в однородном потоке. Учтено отклонение подъемной и боковой силы от осей координат. Получена система дифференциальных уравнений в безразмерной нормализованной форме. Разработан алгоритм решения краевой задачи в среде Mathcad. Исследовано влияние критериев подобия на форму троса, угол атаки и силу натяжения.

Ключевые слова: трос, воздушный поток, аэродинамические силы, краевая задача, численный метод.

V. A. Naumov

*Kaliningrad State Technical University
Russia, Kaliningrad, e-mail: van-old@mail.ru*

SOLUTION OF THE THREE-DIMENSIONAL EQUILIBRIUM PROBLEM OF THE LOAD ON THE ROPE IN THE AIR FLOW

The improved version of the method the numerical solution of the three-dimensional problem of equilibrium of the load in a uniform flow has been developed. The deviation of the lift and lateral forces on the coordinate axes was taken into account. The system of differential equations in the dimensionless normalized form was received. Algorithm for solving boundary value problems in Mathcad has been developed. The influence of similarity criteria on the shape of the cable, the angle of attack and the force of tension was investigated.

***Keywords:** rope, air flow, aerodynamic forces, boundary value problem, numerical method.*

Введение. Приближение гибкой нити широко используется для моделирования систем, содержащих веревки, тросы, канаты, шланги и т.п. В частности, представляет большой интерес форма и усилия в тросах при перемещении грузов на внешней подвеске вертолета [1] или в шлангах системы дозаправки самолета в воздухе [2]. Применяя принцип обратимости движения, можно свести указанные случаи к классической задаче равновесия в потоке твердого тела на гибкой нити с закрепленным концом [3]. При использовании крученых тросов возникает боковая сила [4], в результате чего задача равновесия становится трехмерной. Известен метод введения вспомогательных функций в трехмерных задачах гидромеханики гибких нитей, позволяющий привести систему уравнений к форме, удобной для реализации численных алгоритмов (см., например, [5]). В [6] с использованием пакета Mathcad был разработан метод решения трехмерной задачи равновесия сферического тела на тросе в потоке жидкости. При этом отклонением подъемной силы от вертикального направления, а боковой силы от поперечного – пренебрегалось. В данной статье указанные отклонения учтены, рассмотрено применение численного метода для решения задачи равновесия произвольного груза, подвешенного на тросе, в воздушном потоке.

Постановка задачи. Пусть гибкий нерастяжимый трос диаметром d закреплен в точке O и ориентирован в прямоугольной декартовой системе координат, как показано на рис. 1. Направление оси Ox совпадает с вектором скорости воздушного потока V ; ось Oz направлена вертикально вниз, ось Oy – перпендикулярно к ним. В нижней точке A к тросу прикреплено твердое тело (груз) весом Q , размеры которого много меньше длины троса L .

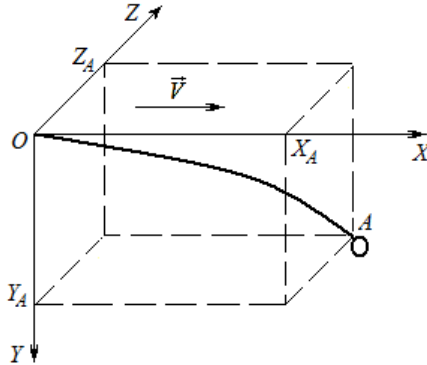


Рис. 1. Схема подвески груза на тросе в воздушном потоке

Векторная форма дифференциального уравнения равновесия гибкой нерастяжимой нити [3]:

$$d\vec{T}/ds + \vec{P} = 0, \quad (1)$$

где \vec{T} – сила натяжения нити, Н; \vec{P} – равнодействующая всех распределенных сил, отнесенных к единице длины нити и приложенных к текущей точке, Н/м; s – дуговая координата текущей точки нити (троса), м.

Проецируя обе части векторного уравнения (1) на оси неподвижной декартовой системы координат, получим:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dX}{ds} \right) + R_x = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dY}{ds} \right) + q + R_y = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dZ}{ds} \right) + R_z = 0, \quad (2)$$

где q – вес единицы длины троса; R_x, R_y, R_z – проекции сил аэродинамического сопротивления троса единичной длины на оси.

Граничные условия к системе дифференциальных уравнений (2) задаем в двух точках:

- в точке O ($s = L$):

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0; \quad (3)$$

- в точке A ($s = 0$):

$$T = T_0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \gamma = \gamma_0. \quad (4)$$

Сила натяжения троса, и косинусы углов в точке крепления груза равны

$$T_0 = \sqrt{Q^2 + R_0^2}, \quad \cos \alpha_0 = Q/T_0, \quad \cos \beta_0 = R_0/T_0, \quad \cos \gamma_0 = 0. \quad (5)$$

Здесь R_0 – сила лобового аэродинамического сопротивления груза (полагаяем, что подъемной силой груза можно пренебречь):

$$R_0 = 0,5 \cdot C_s \cdot S \cdot \rho \cdot V^2,$$

где ρ – плотность воздуха кг/м³; S – характерная площадь тела, м²; C_S – коэффициент аэродинамического сопротивления тела, в автомоделльной области сопротивления можно принять $C_S = \text{const}$.

Силу аэродинамического сопротивления, действующую на трос, обычно раскладывают на три составляющие: лобовую, подъемную и боковую силу. Величины сил на единицу длины вычисляем по формулам:

$$R_L = 0,5C_{L\rho} \cdot d \cdot V^2, \quad R_{\Pi} = 0,5C_{\Pi\rho} \cdot d \cdot V^2, \quad R_B = 0,5C_{B\rho} \cdot d \cdot V^2. \quad (6)$$

Воспользуемся для расчета локальных коэффициентов аэродинамического сопротивления троса в автомоделльной области известными формулами [4, 7]:

$$C_L(\alpha) = C_0 + (C_{90} - C_0) \cdot \sin^{2,7} \alpha, \quad cl = C_L / C_{90}, \quad (7)$$

$$C_{\Pi}(\alpha) = C_{90} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha, \quad cp = C_{\Pi} / C_{90}, \quad (8)$$

$$C_B(\alpha) = \pm k \cdot \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha, \quad cb = C_B / C_{90}. \quad (9)$$

где α – угол атаки; C_0, C_{90} – коэффициенты сопротивления троса при продольном ($\alpha = 0$) и поперечном ($\alpha = 90^\circ$) обтекании соответственно; k – эмпирического коэффициент, зависящий от конструкции и диаметра троса. Так для стальных 6-прядных тросов диаметром $d = 18-30$ мм по данным [4] была получена эмпирическая формула:

$$k = 1 - k_1 \cdot \exp(-k_2 \cdot d), \quad k_1 = 25,62; \quad k_2 = 0,239. \quad (10)$$

Впрочем, в лабораторных опытах, проведенных в КГТУ [8], были получены меньшие значения k . Экспериментальные исследования боковой силы, действующей на витые тросы в воздушном потоке, должны быть продолжены.

Проекция сил аэродинамического сопротивления троса. При малых величинах боковой силы можно пренебречь отклонением подъемной силы от оси OY , а боковой силы от оси OZ , как это сделано в [6]. По формуле (9) величина k может достигать единицы при достаточно больших диаметрах троса. Тогда пренебрегать указанными отклонениями нельзя. Найдем проекции сил аэродинамического сопротивления на неподвижные оси координат с учетом этих отклонений.

Сила лобового сопротивления в любом случае направлена по вектору скорости потока, т.е. по оси OX ; орт этой силы $\vec{l} = (1; 0; 0)$. Этому вектору перпендикулярен орт подъемной силы в текущей точке троса $\vec{p} = (0; p_y; p_z)$. Из свойства направляющих косинусов получим

$$0^2 + p_y^2 + p_z^2 = 1 \Rightarrow p_z = \sqrt{1 - p_y^2}. \quad (11)$$

Далее используем условие, что \vec{p} должен лежать в плоскости, проведенной через вектор скорости потока и касательную к тросу с направляющими косинусами $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$. Смешанное произведение этих трех векторов должно равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_y & p_z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Из (11)-(12) следует:

$$p_y = \cos\beta / m, \quad p_z = \cos\gamma / m, \quad m = \sqrt{\cos^2\beta + \cos^2\gamma}. \quad (10)$$

Боковая сила образует с лобовой и подъемной силой правую (или левую, в зависимости от направления свивки троса) тройку векторов, откуда орт боковой силы можно найти по формуле

$$\vec{b} = \vec{l} \times \vec{p} = (0; -p_z; p_y). \quad (11)$$

Краевая задача в безразмерной нормализованной форме. Введем безразмерные переменные:

$$\sigma = \frac{s}{L}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L}, \quad z = \frac{Z}{L}, \quad \tau = \frac{T}{K}, \quad K = 0,5 \cdot C_{90} \cdot \rho \cdot L \cdot d \cdot V^2, \quad (12)$$

где K – сила, действующая на прямой трос L при поперечном обтекании.

Подставив (12) в (2) и используя орты (10), (11), получим систему дифференциальных уравнений, в безразмерной форме:

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\tau \frac{dx}{d\sigma} \right) + cl = 0, \quad \frac{d}{d\sigma} \left(\tau \frac{dz}{d\sigma} \right) + cp \cdot p_z + cb \cdot p_y = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\tau \frac{dy}{d\sigma} \right) - \Phi + cp \cdot p_y - cb \cdot p_z, \quad \Phi = \frac{q \cdot L}{K}. \quad (14)$$

Чтобы решить задачу численным методом в среде Mathcad, преобразуем дифференциальные уравнения к нормализованной форме: первого порядка и производные только искомым функций. Для этого, как в [6], введем вспомогательные функции:

$$\theta(\sigma) = \tau(\sigma) \frac{dx}{d\sigma}, \quad \varphi(\sigma) = \tau(\sigma) \frac{dy}{d\sigma}, \quad \xi(\sigma) = \tau(\sigma) \frac{dz}{d\sigma}. \quad (16)$$

Возведем обе части равенств (16) в квадрат и сложим их; по вспомогательным функциям можно найти безразмерную величину силы натяжения троса и направляющие косинусы:

$$\tau(\sigma) = \sqrt{\theta^2(\sigma) + \phi^2(\sigma) + \xi^2(\sigma)}, \quad (17)$$

$$\cos \alpha(\sigma) = \frac{\theta(\sigma)}{\tau(\sigma)}, \quad \cos \beta(\sigma) = \frac{\phi(\sigma)}{\tau(\sigma)}, \quad \cos \gamma(\sigma) = \frac{\xi(\sigma)}{\tau(\sigma)}. \quad (18)$$

Формулы (16) - (18) позволяют получить из (13) - (15) замкнутую систему шести дифференциальных уравнений первого порядка в нормализованной форме:

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = cl, \quad \frac{d\phi}{d\sigma} = cp \cdot p_y - cb \cdot p_z, \quad \frac{d\xi}{d\sigma} = \Phi + cp \cdot p_z + cb \cdot p_y, \quad (19)$$

$$\frac{dx}{d\sigma} = -\cos \alpha(\sigma), \quad \frac{dy}{d\sigma} = -\cos \beta(\sigma), \quad \frac{dz}{d\sigma} = -\cos \gamma(\sigma). \quad (20)$$

Знак минус в правых частях (20) обусловлен противоположным направлением отсчета координат x , y , z и σ . Для завершения математической постановки задачи необходимы шесть граничных условий.

Три граничных условия задаем в начале прямоугольной декартовой системы координат, точке O :

$$x(1) = 0, \quad y(1) = 0, \quad z(1) = 0. \quad (21)$$

Направляющие косинусы орта касательной в точке A находим из условия отсутствия боковой и подъемной силы, действующей на груз:

$$\cos \alpha_0 = \frac{R_0}{T_0} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + Ne^2}}, \quad \cos \beta_0 = \frac{Ne}{\sqrt{R^2 + Ne^2}}, \quad \cos \gamma_0 = 0. \quad (22)$$

Граничные условия для вспомогательных функций получим в точке A из (4) - (5) с учетом (22):

$$\theta(0) = \tau_0 \cdot \cos \alpha_0 = R, \quad \phi(0) = \tau_0 \cdot \cos \beta_0 = Ne, \quad \xi(0) = 0, \quad (23)$$

$$R = R_0 / K, \quad \tau_0 = T_0 / K = \sqrt{R^2 + Ne^2}, \quad Ne = Q / K.$$

Из (14) и (23) следует, что критериями подобия краевой задачи являются: число Ньютона Ne – отношение веса груза к силам аэродинамического сопротивления прямого троса, Φ – отношение веса троса к силам его аэродинамического сопротивления, R – отношение сил аэродинамического сопротивления груза и троса.

Результаты численного исследования. Поставленная краевая задача была решена численным методом в среде Mathcad. На рис. 2-9 представлены результаты исследования влияние значений критериев подобия на результаты расчетов.

По рис. 2 видно изменение вдоль троса координат его точек и вспомогательных функций при заданных условиях. Значение $\sigma = 0$ соответствует точке A , $\sigma = 1$ – точке O . Отклонение троса от оси z заметно меньше, чем отклонения от двух других осей (рис. 2, a).

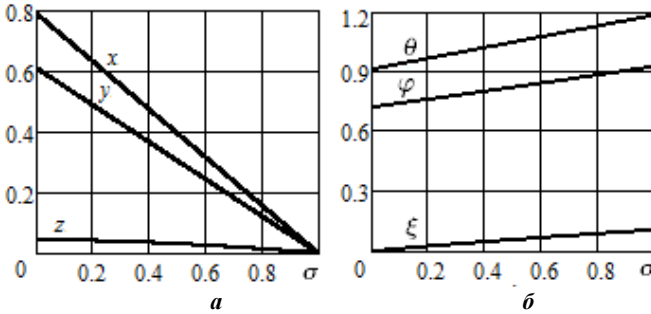


Рис. 2. Результаты расчета формы троса при $\Phi = 0,5$; $Ne = 0,7$; $R = 0,9$:
 a – координаты точек троса; b – вспомогательные функции

На рис. 3-4 показано, как влияет изменение Φ на решение задачи. Увеличение величины Φ означает возрастание веса троса по сравнению с силами аэродинамического сопротивления. В результате груз в равновесии располагается ниже (рис. 4). По рис. 4 с ростом Φ угол α заметно увеличивается, а угол β – уменьшается. При $\sigma = 0$ все углы и сила натяжения не зависят от Φ . При малых Φ (линии 1 и 2 на рис. 3, a) форма троса – выпуклая, тогда как линия 4 – выпуклая. Этот эффект наглядно виден в изменении угла атаки троса (рис. 4, a).

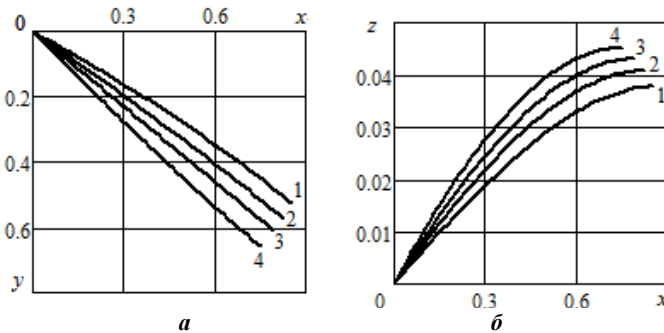


Рис. 3. Проекция тросов на координатные плоскости при $Ne = 0,7$; $R = 0,9$ и различных значениях Φ :
 1 – $\Phi = 0,1$; 2 – $\Phi = 0,3$; 3 – $\Phi = 0,5$; 4 – $\Phi = 0,8$;
 a – на плоскость xOy ; b – на плоскость xOz

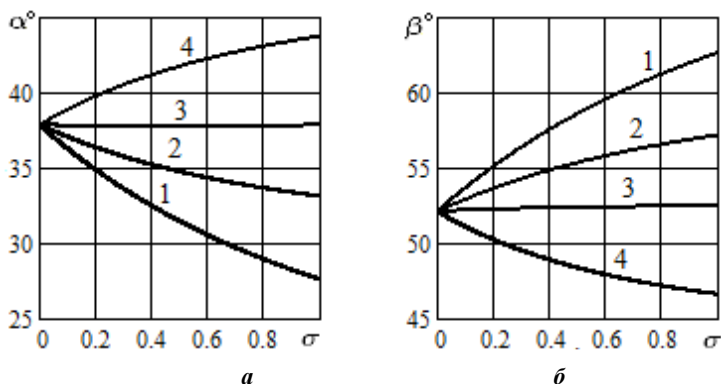


Рис. 4. Изменение углов α (а) и β (б) вдоль троса при различных Φ .
Условия и обозначения, как на рис. 3

На рис. 5-6 показано, как влияет изменение Ne на решение задачи. Увеличение значения Ne означает возрастание веса груза по сравнению с силами аэродинамического сопротивления троса.

В результате груз в равновесии располагается ниже; при этом уменьшается вогнутость кривых на рис. 5, линия 4 становится выпуклой, что подтверждает и рис. 6.

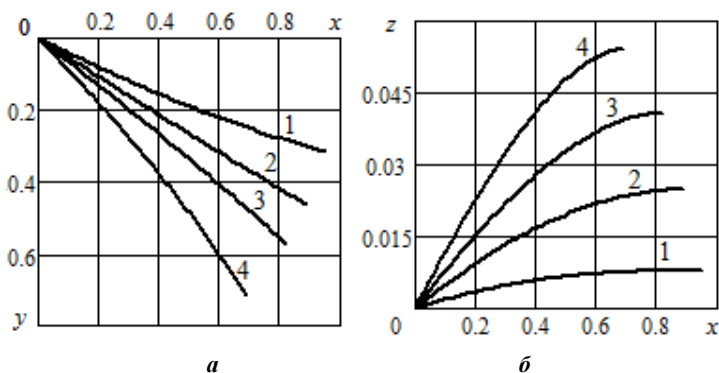


Рис. 5. Проекция тросов на координатные плоскости при $\Phi = 0,3$; $R = 0,9$ и различных значениях Ne :
1 – $Ne = 0,2$; 2 – $Ne = 0,45$; 3 – $Ne = 0,7$; 4 – $Ne = 1,2$;
 a – на плоскость xOy ; b – на плоскость xOz

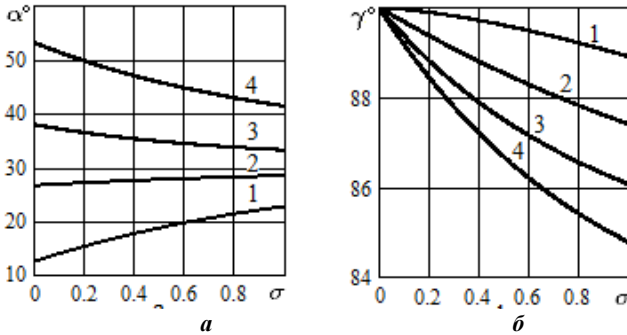


Рис. 6. Изменение углов α (а) и γ (б) вдоль троса при различных Ne .
Условия и обозначения, как на рис. 5

Как видно по рис. 5, б, с ростом значения Ne отклонение троса по оси z увеличивается. По рис. 6 с ростом Ne угол α увеличивается, а угол γ уменьшается. Ne определяет граничное условие в точке крепления груза, поэтому наибольшее влияние наблюдается при $\sigma = 0$.

На рис. 7-8 показано, как влияет изменение R на решение задачи. Увеличение значения R означает возрастание силы аэродинамического сопротивления груза по сравнению с силами аэродинамического сопротивления, действующими на трос. В результате груз в равновесии располагается ниже (см. рис. 7). Отклонение по оси z растет с уменьшением величины R . Рост R приводит к уменьшению угла атаки и увеличению γ (см. рис. 8).

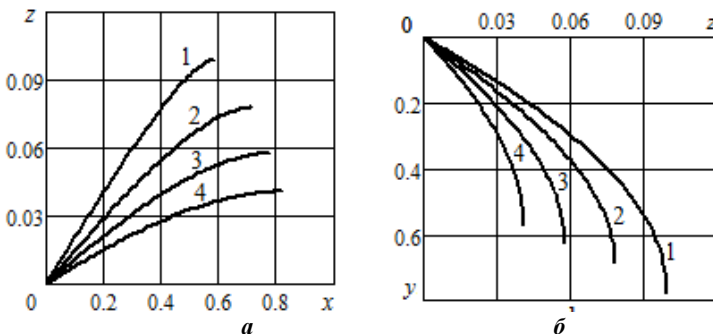


Рис. 7. Проекция тросов на координатные плоскости при $\Phi = 0,3$; $Ne = 0,7$ и различных значениях R :
1 - $R = 0,2$; 2 - $R = 0,5$; 3 - $R = 0,7$; 4 - $R = 0,9$;
а - на плоскость xOz ; б - на плоскость yOz

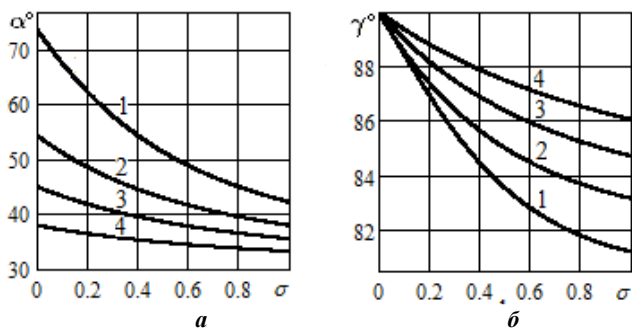


Рис. 8. Изменение углов α (а) и γ (б) вдоль троса при различных R .
Условия и обозначения, как на рис. 7

По рис. 9 видно, и увеличение R , и увеличение Ne приводит к росту безразмерной силы натяжения троса. В соответствии с физическим смыслом растет от точки A к точке O троса. Причем зависимость от дуговой координаты близка к линейной.

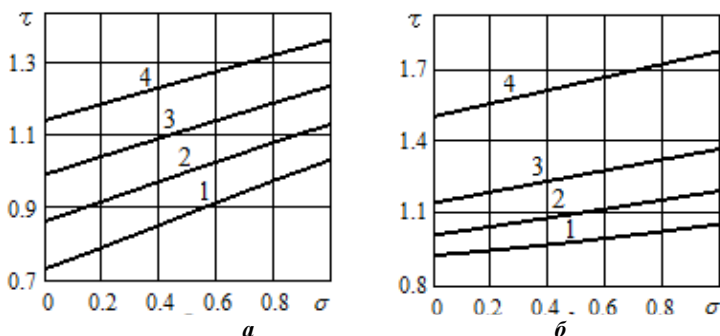


Рис. 9. Изменение безразмерной силы натяжения вдоль троса при $\Phi = 0,3$:
а – при $Ne = 0,7$ и различных значениях R : 1 – $R = 0,2$; 2 – $R = 0,5$; 3 – $R = 0,7$;
4 – $R = 0,9$; xOz ; б – при $R = 0,9$ и различных значениях Ne : 1 – $Ne = 0,2$;
2 – $Ne = 0,45$; 3 – $Ne = 0,7$; 4 – $Ne = 1,2$

Закключение. Разработанный алгоритм позволяет решать с помощью пакета Mathcad трехмерные задачи равновесия груза, подвешенного на тросе в воздушном потоке. Результаты проведенного численного исследования позволяют оценить влияние критериев подобия на решение краевой задачи. Алгоритм может быть использован для решения прикладных задач. Пространственный характер формы витого троса во многом определяется действием боковой аэродинамической силы. Для повышения точности расчета

необходимо проведение дополнительных экспериментальных исследований сил аэродинамического сопротивления криволинейных витых тросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ефимов В.В.* Исследование влияния параметров груза на условия его равновесия на внешней подвеске вертолета // Научный вест. МГТУГА. Сер. Аэромеханика и прочность. 2010. № 151. С. 130-137.
2. *Чеглаков Д.И.* Управление маневренным самолетом при дозаправке топливом в воздухе [Электронный ресурс] // Наука и образование 2013. № 1. С. 235-244. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/500331.html>.
3. *Меркин Д.Р.* Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240 с.
4. *Габрюк В.И.* Механика орудий рыболовства и АРМ промысловика / В.И. Габрюк, В.Д. Кулагин. М.: Колос, 2000. 416 с.
5. *Ильин Н.А.* Анализ системы уравнений динамики гибкой нити / Н.А. Ильин, И.В. Ильина // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2010. № 1 (1). С.31-38.
6. *Наумов В.А.* Численный метод решения трехмерной задачи равновесия сферического тела на тросе в потоке / В.А. Наумов, И.М. Ахмедов // Изв. КГТУ. 2015. № 37. С. 63-72.
7. *Ахмедов И.М.* Коэффициент гидродинамического сопротивления криволинейного каната / И.М. Ахмедов, В.А. Наумов // Изв. КГТУ. 2015. № 38. С. 53-60.
8. *Великанов Н.Л.* Гидродинамическое сопротивление систем из стержней и нитей: монография / Н.Л. Великанов, В.А. Наумов. Калининград: Изд-во ФГОУ ВПО «КГТУ», 2015. 192 с.

УДК 621.1.016.7:661.57

**А. А. Павлов^{1,2}, А. Е. Лебедев^{1,2}, Д. Б. Шмулевский²,
В. В. Гуменный², В. В. Капралов²**

¹Ярославский государственный технический университет

²Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны

Россия, г. Ярославль, e-mail: pavlova@list.ru,

pavlova@list.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ДЕТАНДЕРЕ ПАРОВОЙ МАШИНЫ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА

В работе приводится математическая модель, описывающая термодинамические процессы в роторном детандере паровой машины, сочетающего в себе достоинства турбины и поршневого двигателя

Ключевые слова: детандер, открытая термодинамическая система, термодинамические параметры.

**A. A. Pavlov^{1,2}, A. E. Lebedev^{1,2}, D. B. Shmulevskiy²,
V. V. Gumenny², V. V. Kapralov²**

¹*Yaroslavl State Technical University*

²*Yaroslavl Higher Military School of Air Defence
Russia, Yaroslavl, e-mail: pavlova@list.ru,
pavlova@list.ru*

MODELING OF THERMODYNAMIC PROCESSES IN THE EXPANDER STEAM ENGINE OF VEHICLE ENERGY COMPLEX

We give a mathematical model describing the thermodynamic processes in the rotary expander steam engine, combining the advantages of turbines and reciprocating engine.

Keywords: *expander; open thermodynamic system, thermodynamic parameters.*

В настоящее время разработан целый ряд энергетических комплексов, предназначенных для транспортных средств в качестве энергетических комплексов для одновременной выработки тепловой и электрической энергий во время длительных стоянок. Указанный энергетический комплекс по своей сути представляет из себя паровую машину, реализующую термодинамический органический цикл Ренкина. В состав паровой машины входит такое ключевое устройство, как детандер. Детандер – это устройство, в котором рабочее тело, представляющее собой перегретый пар органического вещества, расширяется с выработкой механической работы. В отличие от других известных в настоящее время конструкций детандеров на энергетических комплексах транспортных средств предлагается использовать его конструкцию, разработанную на кафедре «Двигатели внутреннего сгорания» Ярославского государственного технического университета. Описание конструкции такого детандера представлено в работе [1].

С точки зрения процессов, происходящих в рассматриваемом детандере, последний представляет собой открытую термодинамическую систему. Применим положение первого закона термодинамики для открытой термодинамической системы. В итоге запишем

$$dQ + dE = dU + dL, \quad (1)$$

где dQ – теплота подведенная (отведенная) к рабочему телу детандера;

dE – энергия, поступившая в детандер с потоком рабочего тела;

dU – изменение внутренней энергии рабочего тела, находящегося в детандере;

dL – работа, производимая рабочим телом в детандере.

Особенностью конструкции детандера, применительно к которому приводится математическая модель, является то, что стенки его теплоизолированы. Надежная теплоизоляция стенок детандера позволяет считать процессы, происходящие в нем адиабатическими. Адиабатичность процессов в детандере несколько упрощает уравнение первого закона термодинамики, которое может быть представлено в следующем виде:

$$dE = dU + dL . \quad (2)$$

Далее определим в уравнении (2) изменение энергии dE . Изменение энергии dE складывается из удельной внутренней, кинетической и потенциальной энергий рабочего тела. В силу малого изменения удельной потенциальной энергии рабочего тела ей можно пренебречь.

Обозначим удельную внутреннюю энергию единицы массы рабочего тела, поступающей в детандер как u_1 , а $\frac{w_1^2}{2}$ – удельную кинетическую энергию рабочего тела. Сумма удельной внутренней и кинетической энергий бесконечно малой массы рабочего тела (dG_{en}), поступающего в детандер равна $\left(u_1 + \frac{w_1^2}{2}\right)dG_{en}$. На впуск рабочего тела в детандер затрачивается работа, которая также увеличивает рассмотренную выше сумму внутренней и кинетической энергий бесконечно малой массы рабочего тела. При бесконечно малом перемещении газа во входном сечении детандера работа на впуск рабочего тела будет равна

$$dL_{np} = P_{en} \cdot f_{en} \cdot dx , \quad (3)$$

где P_{en} – давление впуска рабочего тела;

f_{en} – площадь канала для подвода рабочего тела к детандеру;

dx – бесконечно малое перемещение газа.

Учитывая, что $f_{en} \cdot dx = dV_{en} = v_{en} \cdot dG_{en}$, получаем

$$dL_{np} = P_{en} \cdot v_{en} \cdot dG_{en} , \quad (4)$$

где v_{en} – удельный объем рабочего тела в канале для подвода рабочего тела детандера.

При выпуске рабочего тела из детандера её покидает поток единицы массы, имеющий внутреннюю энергию u_2 и кинетическую энергию $\frac{w_2^2}{2}$. Сумма внутренней и кинетической энергий бесконечно малой массы рабочего тела ($dG_{вып}$), покидающей детандер равна $\left(u_2 + \frac{w_2^2}{2}\right)dG_{вып}$.

Работа выпуска рабочего тела из детандера (по аналогии с работой впуска) составит

$$dL_{\text{вып}} = P_{\text{вып}} \cdot v_{\text{вып}} \cdot dG_{\text{вып}} , \quad (5)$$

где $P_{\text{вып}}$ – давление выпуска рабочего тела;

$v_{\text{вып}}$ – удельный объем рабочего тела в канале для отвода рабочего тела от детандера.

В итоге уравнение (2) примет вид

$$dE = \left[\left(u_1 + \frac{w_1^2}{2} \right) dG_{\text{ен}} + P_{\text{ен}} \cdot v_{\text{ен}} \cdot dG_{\text{ен}} \right] - \left[\left(u_2 + \frac{w_2^2}{2} \right) dG_{\text{вып}} + P_{\text{вып}} \cdot v_{\text{вып}} \cdot dG_{\text{вып}} \right] .$$

Учитывая, что $u + Pv = h$, можно записать

$$h_{\text{ен}} = u_1 + P_{\text{ен}}v_{\text{ен}}; h_{\text{вып}} = u_2 + P_{\text{вып}}v_{\text{вып}} .$$

Тогда энергия dE будет определяться в следующем виде:

$$dE = \left(h_{\text{ен}} + \frac{w_1^2}{2} \right) dG_{\text{ен}} - \left(h_2 + \frac{w_2^2}{2} \right) dG_{\text{вып}} . \quad (6)$$

Учитывая, что площадь канала для подвода рабочего тела и его отвода детандера одинаковы, изменением кинетической энергии $\frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2}$ в уравнении (6) можно пренебречь. Тогда выражение для энергии dE в соответствии с уравнением (6) имеет вид

$$dE = h_{\text{ен}} \cdot dG_{\text{ен}} - h_{\text{вып}} \cdot dG_{\text{вып}} . \quad (7)$$

В итоге запишем уравнение (2) в следующем виде:

$$h_{\text{ен}} \cdot dG_{\text{ен}} - h_{\text{вып}} \cdot dG_{\text{вып}} = dU + dL . \quad (8)$$

Для изменения внутренней энергии рабочего тела, находящегося в детандере запишем: $dU = d(uG)$. Работу dL , производимую рабочим телом в детандере определим по формуле

$$dL = PdV , \quad (9)$$

где P – давление рабочего тела в детандере;

dV – изменение объема рабочей полости детандере.

Энтальпии $h_{\text{ен}}$ и $h_{\text{вып}}$ можно записать как:

$$h_{\text{ен}} = Cp_{\text{ен}} \cdot T_{\text{ен}} , \quad (10)$$

где $Cp_{\text{ен}}$ – удельная изобарная теплоемкость рабочего тела в канале для подвода рабочего тела детандера;

$T_{\text{ен}}$ – температура рабочего тела в канале для подвода рабочего детандера;

$$h_{\text{вып}} = C_{p_{\text{вып}}} \cdot T_{\text{вып}}, \quad (11)$$

где $C_{p_{\text{вып}}}$ – удельная изобарная теплоемкость рабочего тела в канале для отвода рабочего тела детандера;

$T_{\text{вып}}$ – температура рабочего тела в канале для отвода рабочего тела детандера.

Учитывая (10) и (11) формулу (8) запишем как

$$C_{p_{\text{вп}}} \cdot T_{\text{вп}} \cdot dG_{\text{вп}} - C_{p_{\text{вып}}} \cdot T_{\text{вып}} \cdot dG_{\text{вып}} = d(uG) + PdV, \quad (12)$$

или

$$C_{p_{\text{вп}}} \cdot T_{\text{вп}} \cdot dG_{\text{вп}} - C_{p_{\text{вып}}} \cdot T_{\text{вып}} \cdot dG_{\text{вып}} = udG + Gdu + PdV. \quad (13)$$

Также учитывая, что $u = C_v \cdot T$ уравнение (13) будет иметь вид

$$C_{p_{\text{вп}}} \cdot T_{\text{вп}} \cdot dG_{\text{вп}} - C_{p_{\text{вып}}} \cdot T_{\text{вып}} \cdot dG_{\text{вып}} = C_v \cdot TdG + G \cdot C_v dT + PdV \quad (14)$$

В уравнении (14) каждый его член разделим на произведение: $G \cdot C_v \cdot T$:

$$\frac{C_{p_{\text{вп}}} \cdot T_{\text{вп}} \cdot dG_{\text{вп}}}{G \cdot C_v \cdot T} - \frac{C_{p_{\text{вып}}} \cdot T_{\text{вып}} \cdot dG_{\text{вып}}}{G \cdot C_v \cdot T} = \frac{C_v \cdot TdG}{G \cdot C_v \cdot T} + \frac{G \cdot C_v dT}{G \cdot C_v \cdot T} + \frac{PdV}{G \cdot C_v \cdot T},$$

откуда после проведения алгебраических преобразований имеем

$$\frac{C_{p_{\text{вп}}} \cdot T_{\text{вп}} \cdot dG_{\text{вп}}}{G \cdot C_v \cdot T} - \frac{C_{p_{\text{вып}}} \cdot T_{\text{вып}} \cdot dG_{\text{вып}}}{G \cdot C_v \cdot T} = \frac{dG}{G} + \frac{dT}{T} + \frac{PdV}{G \cdot C_v \cdot T}, \quad (15)$$

Учитывая равновесность процессов, которые проходят в детандере очевидно, что $T_{\text{вып}} = T$ и $k = C_{p_{\text{вып}}}/C_v$ (представляет собой показатель адиабаты k). Тогда уравнение (15) запишется в следующем виде:

$$\frac{C_{p_{\text{вп}}} \cdot T_{\text{вп}} \cdot dG_{\text{вп}}}{G \cdot C_v \cdot T} - k \frac{dG_{\text{вып}}}{G} = \frac{dG}{G} + \frac{dT}{T} + \frac{PdV}{G \cdot C_v \cdot T}. \quad (16)$$

Рассмотрим отдельно компонент уравнения (16) $\frac{PdV}{G \cdot C_v \cdot T}$. Из

уравнения состояния $P \cdot V = G \cdot R \cdot T$ можно записать $\frac{P}{GT} = \frac{R}{V}$. В итоге

запишем $\frac{PdV}{G \cdot C_v \cdot T} = \frac{R}{V} \frac{dV}{C_v}$, а учитывая уравнение Майера: $C_p - C_v = R$, получим

$$\frac{R}{V} \frac{dV}{C_v} = \frac{(C_p - C_v) dV}{VC_v} = (k - 1) \frac{dV}{V}.$$

После приведенных преобразований уравнение (16) представим в виде

$$\frac{C_{p_{en}} \cdot T_{en} dG_{en}}{G \cdot C_v \cdot T} - k \frac{dG_{вын}}{G} = \frac{dG}{G} + \frac{dT}{T} + (k-1) \frac{dV}{V}. \quad (17)$$

Из термодинамики известно, что:

$$\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} - \frac{dG}{G}. \quad (18)$$

Подставив в уравнение (17) вместо $\frac{dT}{T}$ правую часть уравнения (18) и проведя алгебраические преобразования, запишем

$$\frac{C_{p_{en}} \cdot T_{en} dG_{en}}{G \cdot C_v \cdot T} - k \frac{dG_{вын}}{G} = \frac{dP}{P} + k \frac{dV}{V}. \quad (19)$$

Выразим из уравнения (19) $\frac{dP}{P}$:

$$\frac{dP}{P} = \frac{C_{p_{en}} \cdot T_{en} dG_{en}}{G \cdot C_v \cdot T} - k \frac{dG_{вын}}{G} - k \frac{dV}{V}. \quad (20)$$

Разделив в уравнении (20) левую и правую часть на бесконечно малый угол поворота вала расширительной машины $d\varphi$ и умножив на P , получим дифференциальное уравнение, описывающее изменение давления в расширительной машине в зависимости от угла поворота φ его вала:

$$\frac{dP}{d\varphi} = P \cdot \left(\frac{C_{p_{en}} \cdot T_{en}}{G \cdot C_v \cdot T} \frac{dG_{en}}{d\varphi} - k \frac{dG_{вын}}{G} \frac{d\varphi}{d\varphi} - k \frac{dV}{V} \frac{d\varphi}{d\varphi} \right). \quad (21)$$

Уравнение (21) позволяет учесть изменение давления рабочего тела в полостях детандера по причине его подвода, отвода, совершения им работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пат. 2555606 Российская Федерация. Роторная расширительная машина / А.В. Жаров, А.А. Павлов, И.В. Костылев. Оpubл. 10.07.2015, Бюл. №19.

УДК 519.832: 519.81: 330.4

Е. В. Титова, В. В. Абрамов

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: elenatitovamail@gmail.com,
v.abramov@rsu.edu.ru

МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ОБЪЕМА ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Предложена антагонистическая игровая модель оценки объема предложения одного товара при условии неопределенности спроса.

Ключевые слова: модель, теория игр, принятие решений, объем предложения.

E. V. Titova, V. V. Abramov

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: elenatitovamail@gmail.com,
v.abramov@rsu.edu.ru

MODEL OF EVALUATION OF VOLUME OF OFFER

We propose an antagonistic game model for estimating the volume of the supply of a single product, provided that the demand is uncertain.

Keywords: model, game theory, decision-making, offer volume.

Рассмотрим работу предприятия, которое производит один товар и реализует его только на своем целевом рыночном сегменте в условиях неопределенности рыночной цены и затрат, возникающей из-за того, что объем целевого сегмента неизвестен.

Задача. Составить модель оценки объема предложения для оптимизации прибыли.

Далее будем предполагать, что используемые коэффициенты положительны.

Для решения задачи с учетом специфики рассматриваемой ситуации на определенный период времени примем следующие условия:

1) предприятие производит товар в объеме x , весь произведенный товар гарантированно реализуется на сегменте объемом y по рыночной цене p ;

2) рыночная цена товара, реализуемого предприятием, зависит от объема неудовлетворенного спроса на целевом сегменте: $p = a(y - x)$;

3) объем сегмента определен неточно, имеется оценка $y_1 \leq y \leq y_2$, причем $x_{\max} < y_2$, где x_{\max} – максимальный объем производства;

4) затраты предприятия на производство товара равны b ;

5) затраты z на сбыт (например, на рекламу, на содержание сети сбыта) зависят от объема целевого сегмента.

Далее рассмотрим два случая:

Случай 1: $z = cy - dy^2$. По экономическому смыслу затраты на сбыт – это положительная возрастающая функция от объема сегмента. Поэтому примем условия $cy_1 - dy_1^2 > 0$ и $\frac{c}{2d} > y_2$.

Прибыль предприятия

$f(x, y) = px - (bx + z) = a(y - x)x - (bx + (cy - dy^2)) = -ax^2 + axy + dy^2 - bx - cy$ зависит от неопределенного значения $y \in [y_1, y_2]$ объема сегмента, то есть для предприятия при сбыте товара существует чистый риск. Поэтому для адекватной оценки возможной прибыли целесообразно предполагать наличие прямого конфликта интересов между предприятием, реализующим товар в рискованных условиях, и «агрессивной» средой сбыта на рыночном сегменте. При этом для гарантированной (безрисковой) оценки прибыли предприятие должно придерживаться позиции крайней осторожности. Итак, для решения поставленной задачи составим антагонистическую игровую модель в нормальной форме:

– игрок 1 – это предприятие, его цель – максимум прибыли при наименьшем риске, его чистые стратегии – $x \in X = [0, x_{\max}]$;

– игрок 2 – это целевой рыночный сегмент, его цель – снижение прибыли предприятия, его чистые стратегии – $y \in Y = [y_1, y_2]$;

– функция выигрыша – прибыль предприятия.

Проанализируем разрешимость игры в чистых стратегиях.

Квадратичная функция выигрыша $f(x, y)$ является непрерывно дифференцируемой на множестве допустимых игровых ситуаций $X \times Y$, причем X и Y – выпуклые компакты. Так как $f''_{xx} = -a < 0$, то при каждом $y \in Y$ функция $f(x, y)$ строго вогнута по $x \in X$. Так как $f''_{yy} = d > 0$, то при каждом $x \in X$ функция $f(x, y)$ строго выпукла по $y \in Y$. Итак, все условия теоремы Неймана (следствие из теоремы Нэша) выполнены [1]. Поэтому рассматриваемая игра имеет решение. Более того, из строгости типа вогнутости/выпуклости функции выигрыша следует единственность решения игры.

Запишем необходимые условия седловой точки функции выигрыша:

$$\begin{cases} f'_x = -2ax + ay - b = 0, \\ f'_y = ax + 2dy - c = 0. \end{cases} \quad \text{Полученная линейная система имеет невырожденную основную матрицу } A = \begin{pmatrix} -2a & a \\ a & 2d \end{pmatrix}: \det A = -4ad - a^2 \neq 0. \text{ Значит,}$$

система имеет единственное решение:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{-4ad - a^2} \begin{pmatrix} 2d & -a \\ -a & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{4ad + a^2} \begin{pmatrix} ac - 2bd \\ ab + 2ac \end{pmatrix}.$$

Итак, чтобы выбрать седловую точку и дать осторожную оценку ситуации сбыта для предприятия, требуется проверить выполнение условий

$$x_0 = \frac{ac - 2bd}{4ad + a^2} \in X = [0, x_{\max}] \quad \text{и} \quad y_0 = \frac{2c + b}{4d + a} \in Y = [y_1, y_2].$$

Допустим, $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$. Тогда x_0 – оптимальный объем производства/сбыта, y_0 – оптимальный объем целевого сегмента,

$$f(x_0, y_0) = \frac{db^2 - ac(b+c)}{a(a+4d)} \text{ – оптимальная прибыль фирмы. Заметим, что}$$

$ac \geq 2bd$ при $x_0 \in X$. Поэтому прибыль имеет оценку

$$f(x_0, y_0) \leq \frac{db^2 - 2bd(b+c)}{a(a+4d)} = -\frac{db(b+2c)}{a(a+4d)} < 0.$$

То есть в данном случае с позиции крайней осторожности для предприятия сбыт нецелесообразен.

Допустим, $x_0 < 0$, то есть $ac < 2bd$. Так как x_0 – единственная точка глобального максимума функции $f(x, y)$ по переменной x , то на отрезке $[0, x_{\max}]$ при каждом y эта функция принимает наибольшее значение при $x = 0$. То есть предприятию нецелесообразно заниматься сбытом на целевом сегменте.

Допустим, $x_0 > x_{\max}$. Тогда $f(x, y)$ возрастает по x при $x \leq x_0$. Значит, при каждом $y \in [y_1, y_2]$ функция $f(x, y)$ имеет максимум по переменной $x \in [0, x_{\max}]$ в точке $x = x_{\max}$. Так как функция $f(x, y)$ является глобально выпуклой по y , то при $x = x_{\max}$ без учета ограниче-

ния $y \in [y_1, y_2]$ наилучший ответ $\tilde{y} = \frac{c - ax_{\max}}{2d}$ игрока 2 вычисляется из условия $f'_y = ax_{\max} + 2dy - c = 0$, то есть $f(x, y)$ строго убывает по y при $y < \tilde{y}$ и строго возрастает по y при $y > \tilde{y}$. Обозначим y^* минимум функции $f(x_{\max}, y)$ на отрезке $[y_1, y_2]$. Рассмотрим возможные частные случаи.

Если $\tilde{y} \in [y_1, y_2]$, то $y^* = \tilde{y}$. Тогда имеет место оценка прибыли $f(x_{\max}, y^*) = \frac{1}{4d} \left(2x_{\max}(ac - 2bd) - (x_{\max}^2(4ad + a^2) + c^2) \right)$. В силу условия $x_0 > x_{\max}$ справедливо неравенство $ac - 2bd > x_{\max}(4ad + a^2)$. При этом $f(x_{\max}, \tilde{y}) > \frac{1}{4d} \left(x_{\max}^2(4ad + a^2) - c^2 \right)$. То есть в данном случае осторожная оценка максимальной прибыли положительна, если максимальный объем производства $x_{\max} \geq \frac{c}{\sqrt{4ad + a^2}}$.

Если $\tilde{y} < y_1$, то $y^* = y_1$. Если $\tilde{y} > y_2$, то $y^* = y_2$. Эти случаи подходят для сбыта на целевом сегменте для предприятия с позиции крайней осторожности, если $f(x_{\max}, y^*) > 0$.

Вывод 1. В рамках предложенной игровой модели для случая квадратичной зависимости затрат на обслуживание сегмента от объема сегмента предприятие:

1) воздерживается от сбыта, если

$$\frac{ac - 2bd}{4ad + a^2} \leq x_{\max} \text{ и } \frac{2c + b}{4d + a} \in [y_1, y_2],$$

2) реализует максимальный объем товара x_{\max} , если осторожный прогноз максимальной прибыли $f(x_{\max}, y^*) > 0$, где y^* – оценка объема целевого сегмента (определяется по указанному выше правилу).

Случай 2: $z = cy$.

Вновь используем игровую модель с той лишь разницей, что функция выигрыша имеет вид

$$f(x, y) = px - (bx + z) = (ax - c)y - (bx + ax^2).$$

Эта функция не является строго выпуклой по переменной y . С позиции крайней осторожности в рассматриваемом случае проверим необходимое условие для участия предприятия в сбыте – положительность

нижней цены игры $\alpha = \max_{x \in [0, x_{\max}]} W(x)$, где $W(x) = f(x, y(x))$ – гарантированный выигрыш игрока 1, $y = y(x) = \arg \min_y f(x, y)$ – наилучший ответ игрока 2.

Очевидно, неравенство $ax - c > 0$ невозможно при $x \in [0, x_{\max}]$.

Допустим, $ax - c \leq 0$ при $x \in [0, x_{\max}]$, то есть $x_{\max} \leq c/a$. Тогда

$$W(x) = f(x, y_2), \quad x^* = \arg \max_{(-\infty; +\infty)} W(x) = \frac{ay_2 - b}{2a}.$$

Если $y_2 < b/a$, то $x^* < 0$. При этом $W(x)$ строго убывает на отрезке $[0, x_{\max}]$. Тогда $\alpha = W(0)$. То есть сбыт нецелесообразен.

Если $b/a \leq y_2 \leq 2x_{\max} + b/a$, то $x^* \in [0, x_{\max}]$. Тогда $\alpha = W(x^*)$. При этом

$$\beta = \min_{y \in [y_1, y_2]} \left\{ \max_{x \in [0, x_{\max}]} f(x, y) \right\} = \min_{y \in [y_1, y_2]} V(y) -$$

верхняя цена игры, где $V(y) = f\left(\frac{ay - b}{2a}, y\right)$ – гарантированный выигрыш

игрока 2, $\frac{ay - b}{2a} \in [0, x_{\max}]$ – наилучший ответ игрока 1. Глобальный минимум

функции $V(y)$ достигается в точке $y = 2c/a + b/a \geq 2x_{\max} + b/a \geq y_2$. Следовательно, $\beta = V(y_2)$. Нетрудно видеть, что при выполнении оценок $x_{\max} \leq c/a$ и $b/a \leq y_2 \leq 2x_{\max} + b/a$ существует оптимальная цена игры

$$\alpha = \beta = f\left(\frac{ay_2 - b}{2a}, y_2\right) = \frac{(ay_2 - b)^2}{4a} - cy_2.$$

Если эта цена положительна, то для предприятия целесообразен сбыт в объеме $\frac{ay_2 - b}{2a}$.

Если $y_2 \geq 2x_{\max} + b/a$, то $x^* \geq x_{\max}$. При этом $W(x)$ строго возрастает на отрезке $[0, x_{\max}]$. Тогда оказывается, что оптимальная цена игры $\alpha = \beta = W(x_{\max}) = f(x_{\max}, y_2)$. Если эта цена положительна, то для предприятия целесообразен максимальный объем сбыта.

Допустим, $ax - c$ меняет знак в $[0, x_{\max}]$, то есть $x_{\max} > c/a$. При этом

$$W(x) = \begin{cases} W_1(x) = (ax - c)y_2 - (bx + ax^2), & 0 \leq x \leq c/a, \\ W_2(x) = (ax - c)y_1 - (bx + ax^2), & c/a \leq x \leq x_{\max}. \end{cases}$$

Вычислим точки максимума без учета ограничений на аргумент:

$$x_1 = \arg \max_{(-\infty; +\infty)} W_1(x) = \frac{ay_2 - b}{2a}, \quad x_2 = \arg \max_{(-\infty; +\infty)} W_2(x) = \frac{ay_1 - b}{2a}.$$

Ясно, что $x_2 < x_1$.

Если $x_1 \in [0, c/a]$, то $x_2 < c/a$. При этом нижняя цена игры

$\alpha = \max\{W_1(x_1), W_2(c/a)\}$, где $W_1(x_1) = \frac{(ay_2 - b)^2}{4a} - cy_2$, $W_2(c/a) = -c(c+b)/a < 0$. Предположим, что $W_1(x_1) > 0$. Тогда $\alpha = W_1(x_1)$. По схеме, использованной выше, можно установить, что $W_1(x_1)$ – оптимальная цена игры.

Если $x_1 < 0$, то $x_2 < c/a$. При этом $\alpha = \max\left\{-cy_2, -\frac{c^2 + bc}{a}\right\} < 0$.

Значит, сбыв не целесообразен.

Если $x_1 > c/a$, то $\alpha = \max\{W_1(c/a), W_2(x_{\max})\}$. При этом $W_1(c/a) = -\frac{c^2 + bc}{a} < 0$, $W_2(x_{\max}) = f(x_{\max}, y_2)$. Предположим, $W_2(x_{\max}) > 0$. Тогда по использованной выше схеме можно установить, что $W_2(x_{\max})$ – оптимальная цена игры.

Вывод 2. В рамках предложенной игровой модели для случая линейной зависимости затрат на обслуживание сегмента от объема сегмента предприятие:

- 1) реализует продукцию в объеме $\frac{ay_2 - b}{2a}$, если справедливы оценки $x_{\max} \leq c/a$, $b/a \leq y_2 \leq 2x_{\max} + b/a$ или оценки $x_{\max} > c/a$, $b/a \leq y_2 \leq 2c/a + b/a$ и прибыль $\frac{(ay_2 - b)^2}{4a} - cy_2$ положительна,
- 2) реализует максимальный объем товара x_{\max} , если $y_2 \geq 2x_{\max} + b/a$, $x_{\max} \leq c/a$ и осторожный прогноз максимальной при-

были $f(x_{\max}, y_2) > 0$ или $y_1 > 2c/a + b/a$, $x_{\max} > c/a$ и осторожный прогноз максимальной прибыли $f(x_{\max}, y_1) > 0$,

3) воздерживается от сбыта, если $y_2 < b/a$ и $x_{\max} \leq c/a$ или прогноз прибыли в пунктах 1), 2) дает отрицательное значение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.

УДК 621.396.967

А. Н. Хожайнов, С. В. Овчинников

Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны
Россия, г. Ярославль, e-mail: khozhaynov1973@mail.ru, osv70@yandex.ru

УСТРОЙСТВО КОРРЕКЦИИ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ ИСКАЖЕНИЙ ЛИНЕЙНО-ЧАСТОТНО МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ В РАДИОЛОКАЦИОННОЙ СТАНЦИИ С РЕЖИМОМ РАСПОЗНАВАНИЯ

В статье кратко изложены основные причины возникновения амплитудно-фазовых искажений линейно-частотно модулированных сигналов и предложено устройство их коррекции.

Ключевые слова: радиолокационная станция, ЛЧМ сигналы, модуляционные искажения, устройство коррекции амплитудно-фазовых искажений.

A. N. Khozhainov, S. V. Ovchinnikov

Yaroslavl Higher Military School of Air Defense,
Russia, Yaroslavl, khozhaynov1973@mail.ru, osv70@yandex.ru

DEVICE FOR CORRECTION OF AMPLITUDE-PHASE DISTORTIONS OF LFM SIGNALS IN THE RADAR WITH RECOGNITION MODE

The article briefly outlines the main causes of the development of amplitude-phase distortions of chirp signals and suggests a device for their correction.

Keywords: radar, LFM signals, modulation distortion, the device correcting the amplitude-phase distortion.

Радиолокационная станция (РЛС) 22Ж6М является первой отечественной РЛС с аппаратурой распознавания. Хотя многие специалисты отмечают, что эта аппаратура распознавания является недоработанной, её всё же следует рассматривать как первый опыт в радиолокационном распознавании летательных аппаратов [1].

В РЛС 22Ж6М используется метод распознавания целей по дальностным радиолокационным портретам с использованием широкополосных линейно-частотно модулированных (ЛЧМ) радиоим-пульсов. Ширина спектра сигнала выбирается такой, чтобы сжатый импульс на выходе устройств обработки позволял разрешать отдельные элементы конструкции самолета. Полученный в процессе локации дальностный портрет цели сравнивается с эталонными для каждого класса целей, и принимается решение о том, к какому классу относится цель.

В процессе формирования и прохождения ЛЧМ зондирующих сигналов через усилительные тракты возникают внутриимпульсные модуляционные искажения [2, 4].

При формировании сигналов основные причины возникновения модуляционных искажений обусловлены собственными шумами задающих генераторов; влиянием побочных составляющих спектра сигнала и гетеродина в преобразователях и умножителях частоты; инерционностью, а также нелинейностью амплитудных модуляционных характеристик частотных и фазовых модуляторов при активном и комбинированном методах формирования ЧМ сигналов; ошибками дискретизации во времени, ошибками квантования по уровню и ошибками цифро-аналогового преобразования, а также конечным шагом дискретизации во времени и квантования по уровню при цифровом методе формирования; не идеальностью изготовления дисперсионных линий задержки.

Прохождение сигнала в усилительном тракте также сопровождается искажениями, основными источниками которых являются усилители СВЧ и элементы волноводного тракта. Основными причинами возникновения модуляционных искажений сигналов можно назвать нестабильности питающих напряжений на электродах усилителя, вызывающие изменение скорости и параметров электронного потока; паразитную амплитудную модуляцию усиливаемого сигнала, изменяющую степень взаимодействия высокочастотного поля с электронным потоком; нелинейность ФЧХ, изменение параметров электронного потока и реакция высокочастотной нагрузки на изменение частоты входного сигнала; несогласованность каскадов усиления и др. [3].

Осциллограммы огибающей, спектра и внутриимпульсных отклонений частоты от линейного закона $\Delta F(t)$ ЛЧМ сигнала с выхода полосового фильтра (ПФ) в реальном масштабе времени приведены на рис.1.

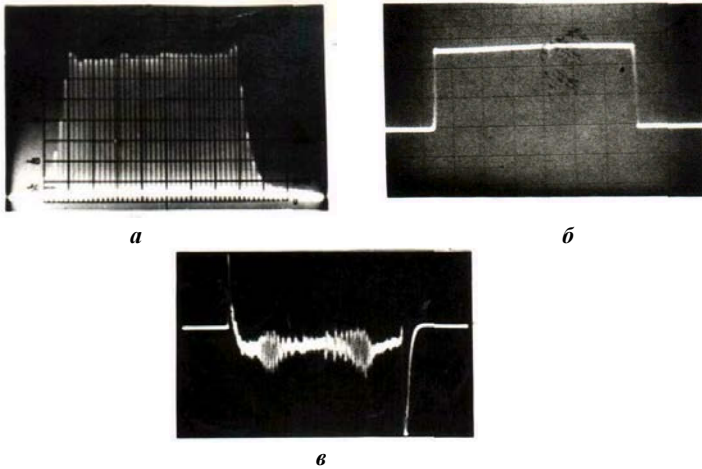


Рис. 1. Осциллограммы:

- a* – спектра ЛЧМ сигнала с выхода полосового фильтра;
б – огибающей ЛЧМ сигнала с выхода полосового фильтра;
в – внутриимпульсных отклонений частоты от линейного закона ЛЧМ сигнала с выхода полосового фильтра

Полученные значения модуляционных искажений требуют индивидуального отбора дисперсионных фильтров по их минимуму.

Разработана математическая модель искажений, позволяющая адекватно оценить их влияние на дальностные радиолокационные портреты. Выбрана математическая модель искажений в виде суммы гармонических составляющих:

$$\Delta F(t) = \Delta \bar{F} + \sum_{k=1}^N \Delta F_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (1)$$

где $\Delta \bar{F} = m\{\Delta F(t)\}$ - математическое ожидание функции, описывающей искажение закона изменения частоты, не зависящее от времени;

ΔF_k - амплитуда k -той гармоники;

$\omega_k = k\omega_1$ - частоты k -той гармоники, кратные основной частоте;

φ_k - случайные начальные фазы равномерно распределенные в интервале $(0, 2\pi)$.

На основе анализа фильтровых и корреляционно-фильтровых устройств разработаны требования к уровню модуляционных искажений, возникающих при фильтровой и корреляционно-фильтровой обработке.

Основной причиной ухудшения разрешающей способности при фильтровой обработке многочастотных сигналов является несогласован-

ность частотных характеристик каналов с комплексными огибающими частотных составляющих многочастотного сигнала. Наибольший вклад в рассогласование частотных характеристик составляющих и каналов вносят согласованные фильтры, которые обычно выполняются на дисперсионных ультразвуковых линиях задержки (ДУЛЗ).

Неидентичность частотных характеристик каналов фильтровых схем обработки ЛЧМ сигналов приводит к появлению разбросов длительностей, амплитуд, начальных фаз и средних частотных составляющих сигнала на входе сумматора, что приводит, в свою очередь к ухудшению потенциально достижимой разрешающей способности по дальности ЛЧМ сигналов. Особенностью корреляционно-фильтровой схемы обработки ЛЧМ сигналов является то, что основные модуляционные искажения вносит гетеродин.

Для того чтобы обеспечить заданный уровень модуляционных искажений в устройствах фильтровой и корреляционно-фильтровой обработки, необходимо применять специальные устройства коррекции модуляционных искажений.

На основе анализа существующих устройств коррекции модуляционных искажений разработано устройство коррекции амплитудно-фазовых искажений в усилительном тракте (рис. 2).

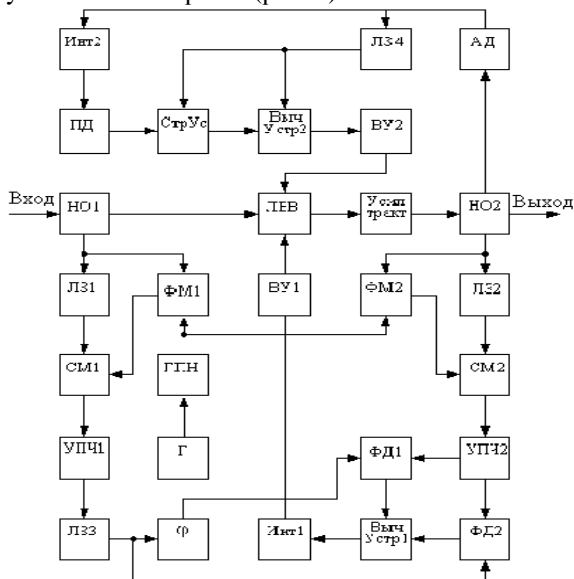


Рис. 2. Структурная схема устройства коррекции амплитудно-фазовых искажений в усилительном тракте

В данном устройстве обеспечивается высокая точность коррекции и большая ширина спектра корректируемого сигнала. Это достигается осуществлением демодуляции опорного и выходного сигналов.

На первом вычитающем устройстве сравниваются сигналы с выходов двух фазовых детекторов, работающих в разных режимах. Выходным сигналом первого вычитающего устройства является сигнал, напряжение которого пропорционально отклонениям фазы от закона модуляции. Это напряжение в качестве модулирующего подается на замедляющую систему лампы бегущей волны, осуществляя фазовую модуляцию входного сигнала. Подбором величин коэффициентов передачи интегрирующего звена и видеосуилителя, крутизны фазовой характеристики фазового детектора и модуляционной характеристики второго фазового модулятора добиваются компенсации фазовых искажений на выходе усилительного тракта в течение всей длительности корректируемого сигнала.

Выходным сигналом второго вычитающего устройства является напряжение, амплитуда которого пропорциональна отклонениям амплитуды от закона модуляции. Это напряжение, также в качестве модулирующего подается на замедляющую систему лампы бегущей волны, осуществляя амплитудную модуляцию входного сигнала.

Практическое использование предлагаемого устройства позволит повысить показатели качества в РЛС 22Ж6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградов А.П.* Основы обработки и передачи информации. Ч. 2. Измерение, опознавание, распознавание // СПВУРЭ ПВО, 1996. 226 с.
2. Селекция и распознавание на основе локационной информации / А.Л. Горелик, Ю.Л. Барабаш, О.В. Кривошеев, С.С. Эпштейн. М.: Радио и связь, 1990. 186 с.
3. *Охрименко А.Е.* Основы радиолокации и РЭБ. Ч. 1. Основы радиолокации. М.: Воениздат, 1983. 240 с.
4. *Ширман Я.Д.* Радиолокационное распознавание: Учебное пособие по курсу «Теоретические основы радиолокации». Харьков, 1994. 560 с.

УДК 519.7:336

В. В. Швыров, В. Н. Шишлакова, Р. Н. Сентяй, Д. А. Капустин

Луганский национальный университет им. Тараса Шевченко
г. Луганск, e-mail: slsh@i.ua

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЧЕТКИХ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМИ ПОРТФЕЛЯМИ В ИТ-СЕКТОРЕ

Выполняется разработка математической модели для формирования стратегии управления инвестиционным портфелем с использованием методов нечетких множеств и композиции нечетких бинарных отношений.

Ключевые слова: задача о назначениях, нечеткие множества, нечеткие бинарные отношения.

V. V. Shvyrov, V. N. Shishlakova, R. N. Sentyay, D. A. Kapustin

*Luhansk Taras Shevchenko National University
Luhansk, e-mail: slsh@i.ua*

USE OF FUZZY BINARY RELATIONS TO MANAGE INVESTMENT PORTFOLIOS IN THE IT SECTOR

A mathematical model is being developed to formulate an investment portfolio management strategy using fuzzy-set methods and performing a composition of fuzzy binary relations.

Keywords: assignment problem, fuzzy sets, fuzzy binary relations.

Введение. Сфера ИТ-технологий, в частности современных финансовых технологий, является одной из наиболее быстро развивающихся за последние несколько лет. Инвестиции в различные ИТ-проекты и стартапы достигают миллиардов долларов. В связи с этим, возникают задачи оптимального управления инвестициями в условиях дефицита квалифицированных специалистов в новых высокотехнологичных областях, которые бы могли оперативно и эффективно выстраивать стратегию действий на рынке.

Классическая задача по управлению инвестиционным портфелем возникла уже достаточно давно, основные положения портфельной теории были сформулированы Марковицем в 1950-1951 гг. в работе [4], в которой

были сформулированы основные положения задачи выбора оптимального портфеля. Данная модель подразумевает оценку по двум параметрам – доходности и риску.

Основным методом снижения рисков является диверсификация путем распределения инвестиций среди различных направлений. Т.е. чем ниже меньше корреляция между активами в портфеле, тем ниже риски.

Нечеткие множества впервые были определены Заде [8] и послужили отправной точкой для многих дальнейших работ в самых различных областях. Основы данной теории можно посмотреть в [3].

Использование теории нечетких множеств в задачах формирования инвестиционного портфеля освещалось большим числом авторов, например [1, 2, 6] для самых различных начальных условий. Различные модели рынков и подходы к формированию портфелей можно найти в [7].

Целью данной работы является поиск подходов к решению задачи оптимального управления инвестициями с помощью нечетких бинарных отношений с учетом специфики современных финансовых технологий.

Объект исследования. Поиск оптимального управления инвестиционными портфелями в условиях кадрового дефицита.

Предмет исследования. Подходы к формированию инвестиционного портфеля в области современных финансовых технологий.

1. Основные определения. Напомним некоторые определения из теории нечетких множеств.

Определение. Нечеткое множество $A \subset X$ представляет собой набор пар $\{(x, \mu^A(x))\}$, где $x \in X$ и $\mu^A : X \rightarrow [0, 1]$ – функция принадлежности, которая представляет собой некоторую субъективную меру соответствия элемента нечеткому множеству $\mu^A(x)$ и может принимать значения от нуля, который обозначает абсолютную непринадлежность, до единицы, которая, наоборот, говорит об абсолютной принадлежности элемента x нечеткому множеству A .

Если нечеткое множество A определено на конечном универсальном множестве $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то его удобно обозначать следующим образом:

$$A = \mu^A(x_1)/x_1 + \mu^A(x_2)/x_2 + \dots + \mu^A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \mu^A(x_i)/x_i,$$

где $\mu^A(x)/x$ – пара "функция принадлежности/элемент", называемая синглтоном, а "+" – обозначает совокупность пар.

Подобно бинарным отношениям на обычном множестве введем понятие нечеткого бинарного отношения.

Определение. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$. Нечетким бинарным отношением R называется нечеткое множество, определенное на

прямом произведении $X \times Y$, которому соответствует функция принадлежности $\mu^R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$, где $\mu^R(x, y)$ отражает степень зависимости между $x \in X, y \in Y$.

Определение. Максимальной композицией нечетких бинарных отношений A, B заданных на множествах $X \times Y$ и $Y \times Z$ называется нечеткое отношение $G = A \circ B$ на множестве $X \times Z$ с функцией принадлежности

$$\mu^G(x, z) = \sup_{y \in Y} \min(\mu^A(x, y), \mu^B(y, z)),$$

$$(x, z) \in X \times Z, (x, y) \in X \times Y, (y, z) \in Y \times Z,$$

В случае если X, Y, Z - конечные множества, то матрица композиции нечетких бинарных отношений получается как максимальное произведение матриц отношений A, B . Данная операция выполняется как обычное произведение матриц, в котором операция поэлементного умножения заменяется на нахождение минимума, а суммирование на нахождение максимума. Подобным образом можно определить и минимаксную композицию.

Пример. Пусть заданы нечеткие бинарные отношения A, B

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Пусть G_1 - максимальная композиция, G_2 - минимаксная композиция, тогда

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0,8 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

2. Задание нечетких бинарных отношений. Задачу формирования оптимального инвестиционного портфеля можно свести к классической задаче о назначениях, если ввести ряд дополнительных условий и ограничений.

Задача о назначениях является одной из фундаментальных задач в области комбинаторной оптимизации, она состоит в поиске минимальной суммы дуг во взвешенном двудольном графе. В общей форме она может быть сформулирована следующим образом: имеется m работ и n исполнителей; исполнитель может быть назначен на выполнение любой, но только одной из работ; работы имеют различные затраты; необходимо назначить исполнителей так, чтобы выполнить работы с минимальными затратами.

Если число работ совпадает с числом исполнителей, то говорят о линейной задаче о назначениях или просто задаче о назначениях. Данная задача может быть решена различными методами, например, венгерским алгоритмом [10].

Предположим, что поставлена задача сформировать инвестиционный портфель, состоящий из ценных бумаг (активов) компаний или стартапов, связанных с перспективными финансовыми технологиями. Для управления активами собрана команда менеджеров, IT-специалистов и аналитиков в различных IT-секторах. Необходимо наиболее эффективным образом назначить менеджеров по управлению активами и осуществлению торговых операций для различных секторов.

Пусть имеется объем V средств, которые полностью необходимо инвестировать в активы $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Для снижения рисков формируется пакет инвестиционных портфелей объемами V_1, \dots, V_n , такие что $V_1 + V_2 + \dots + V_n = V$. Обозначим через $M = \{M_1, \dots, M_n\}$ множество менеджеров (IT-специалистов) которые будут выполнять управление инвестициями в объемах V_1, \dots, V_n , соответственно. Далее, обозначим через $T = \{T_1, \dots, T_k\}$ множество технологий, в развитие которых будет выполнено инвестирование. Для каждого из специалистов M_1, \dots, M_n можно определить степень владения технологией (степень знаний в определенном IT-секторе) для каждой из рассматриваемых финансовых технологий T_1, \dots, T_k . Таким образом, можно построить на базисных множествах M, T нечеткое бинарное отношение R_{MT} с функцией принадлежности $\mu^{R_{MT}}$, показывающей степень владения технологией

$$\mu^{R_{MT}} : M \times T \rightarrow [0; 1].$$

Например, определим множество технологий в табл. 1 и пусть множество специалистов $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$.

Таблица 1. Технологии IT-сектора

Обозначение	Название технологии
T_1	Безопасность (анонимность)
T_2	Управление активами
T_3	Межбанковские платежи (трансграничные платежи)
T_4	Blockchain технологии
T_5	Мобильный банкинг
T_6	Облачные вычисления
T_7	Искусственный интеллект
T_8	Большие данные
T_9	Нейросетевые технологии

Тогда, нечеткое бинарное отношение μ^{R_M} может быть представлено табл. 2 исходя из степени владения специалистами данными технологиями.

Таблица 2. Нечеткое отношение $\mu^{R_{MT}}$

$\mu^{R_{MT}}$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
M_1	0,7	0,1	0,5	0,8	0,2	0,2	0,5	0,3	0,9
M_2	0,3	0,5	0,5	0,2	0,3	0,9	0,9	0,8	0,8
M_3	0,8	0,6	0,4	0,7	0,6	0,3	0,5	0,9	0,3
M_4	0,7	0,1	0,9	0,8	0,1	0,4	0,7	0,9	0,2
M_5	0,3	0,2	0,7	0,4	0,9	0,8	0,6	0,4	0,5

Далее, построим на базисных множествах T, A нечеткое бинарное отношение R_{TA} с функцией принадлежности $\mu^{R_{TA}}$, которая показывает, насколько сильно связаны активы (стартапы, ценные бумаги компаний) A_1, \dots, A_n с технологиями T_1, \dots, T_k :

$$\mu^{R_{TA}} : T \times A \rightarrow [0;1].$$

Пусть, для примера, имеются компании A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , для которых требуется определить оптимального менеджера M_1, \dots, M_n по управлению инвестициями. Тогда нечеткое бинарное отношение может быть задано таблицей 3.

Таблица 3. Нечеткое отношение $\mu^{R_{TA}}$

$\mu^{R_{TA}}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
T_1	0,8	0,2	0,2	0,5	0,1
T_2	0,2	0,2	0,9	0,1	0,9
T_3	0,4	0,3	0,7	0,1	0,8
T_4	0,1	0,8	0,5	0,2	0,4
T_5	0,1	0,7	0,5	0,5	0,2
T_6	0,9	0,9	0,4	0,7	0,3
T_7	0,2	0,1	0,3	0,8	0,7
T_8	0,3	0,2	0,1	0,8	0,6
T_9	0,1	0,8	0,2	0,1	0,3

Сформулируем задачу определения оптимального назначения следующим образом: пусть задан взвешенный двудольный граф $G = (M, A; E)$ с n вершинами, которые соответствуют менеджерам и n вершинами, которые соответствуют ресурсам. Положим, что вес ребра соединяющего вершину M_i с вершиной A_j равен c_{ij} . Требуется найти совершенное паросочетание с максимальным весом. Так как $|M| = |A| = n$, то для построения максимального паросочетания достаточно решить следующую задачу линейного программирования:

$$z = \max_x \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij};$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n; \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, \dots, n; x_{ij} \geq 0, i, j = 1, \dots, n,$$

где переменная x_{ij} представляет назначение менеджера M_i для управления ресурсом A_j ; при этом $x_{ij} = 1$, если менеджер назначен и 0 в противном случае.

Рассматривая задачу о назначениях для случаев максиминной и минимаксной композиции нечетких бинарных отношений R_{MT}, R_{TA} , получаем следующую задачу:

$$\sum_{M_i \in M} \mu_{\max \min}^{R_{MA}}(M_i, A_j) \rightarrow \max,$$

$$\sum_{M_i \in M} \mu_{\min \max}^{R_{MA}}(M_i, A_j) \rightarrow \max,$$

где $\mu_{\max \min}^{R_{MA}}$ - функция принадлежности для максиминной композиции, $\mu_{\min \max}^{R_{MA}}$ - функция принадлежности для минимаксной композиции.

3. Композиция нечетких бинарных отношений. Для решения поставленной задачи выполним максиминную и минимаксную композицию нечетких бинарных отношений R_{MT} и R_{TA} . Занесем исходные данные задачи в лист Excel (рис. 1.)

Для автоматизации расчетов используем формулы
 =МАКС(МИН(\$A1;D\$8);МИН(\$B1;D\$9);МИН(\$C1;D\$10);МИН(\$D1;D\$11);МИН(\$E1;D\$12);МИН(\$F1;D\$13);МИН(\$G1;D\$14);МИН(\$H1;D\$15);МИН(\$I1;D\$16)

для максиминной композиции, и

=МИН(МАКС(\$A1;D\$8);МАКС(\$B1;D\$9);МАКС(\$C1;D\$10);МАКС(\$D1;D\$11);МАКС(\$E1;D\$12);МАКС(\$F1;D\$13);МАКС(\$G1;D\$14);МАКС(\$H1;D\$15);МАКС(\$I1;D\$16))

для минимаксной композиции.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	0,7	0,1	0,5	0,8	0,2	0,2	0,5	0,3	0,9						
2	0,3	0,5	0,5	0,2	0,3	0,9	0,9	0,8	0,8						
3	0,8	0,6	0,4	0,7	0,6	0,3	0,5	0,9	0,3						
4	0,7	0,1	0,9	0,8	0,1	0,4	0,7	0,9	0,2						
5	0,3	0,2	0,7	0,4	0,9	0,8	0,6	0,4	0,5						
6										Максимная композиция					
7										A1	A2	A3	A4	A5	
8				0,8	0,2	0,2	0,5	0,1		M1	0,7	0,8	0,5	0,5	0,5
9				0,2	0,2	0,9	0,1	0,9		M2	0,9	0,9	0,5	0,8	0,7
10				0,4	0,3	0,7	0,1	0,8		M3	0,8	0,7	0,6	0,8	0,6
11				0,1	0,8	0,5	0,2	0,4		M4	0,7	0,8	0,7	0,8	0,8
12				0,1	0,7	0,5	0,5	0,2		M5	0,8	0,8	0,7	0,7	0,7
13				0,9	0,9	0,4	0,7	0,3							
14				0,2	0,1	0,3	0,8	0,7		Минимаксная композиция					
15				0,3	0,2	0,1	0,8	0,6		A1	A2	A3	A4	A5	
16				0,1	0,8	0,2	0,1	0,3		M1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,2
17										M2	0,2	0,3	0,3	0,2	0,3
18										M3	0,3	0,4	0,3	0,3	0,3
19										M4	0,1	0,2	0,2	0,1	0,2
20										M5	0,2	0,2	0,3	0,2	0,3
21															

Рис. 1. Максимная и минимаксная композиция отношений.

Таким образом, были получены следующие нечеткие бинарные отношения:

$$\mu_{\max \min}^{R_{MA}} : M \times A \rightarrow [0;1], (M_i, A_j) \mapsto c_{ij},$$

$$\mu_{\min \max}^{R_{MA}} : M \times A \rightarrow [0;1], (M_i, A_j) \mapsto d_{ij}.$$

где функция принадлежности определяет степень соответствия каждого менеджера M_j ресурсу $A_j, j = 1, \dots, n$.

В качестве примера найдем оптимальное решение для максимной композиции нечетких бинарных отношений. Так, после выполнения композиции имеем матрицу весов

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,8 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,9 & 0,9 & 0,5 & 0,8 & 0,7 \\ 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,8 & 0,6 \\ 0,7 & 0,8 & 0,7 & 0,8 & 0,8 \\ 0,8 & 0,8 & 0,7 & 0,7 & 0,7 \end{pmatrix},$$

Пусть переменная x_{ij} представляет назначение менеджера M_i для управления ресурсом A_j , кроме того, $x_{ij} = 1$, если менеджер назначен и 0 в противном случае. Таким образом, имеем ограничения по менеджерам:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 1, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 1, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 1, \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} &= 1, \end{aligned}$$

и по ресурсам

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 1, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &= 1, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 1. \end{aligned}$$

Целевая функция примет вид

$$\begin{aligned} &0,7x_{11} + 0,8x_{12} + 0,5x_{13} + 0,5x_{14} + 0,5x_{15} + 0,9x_{21} + 0,9x_{22} + \\ &0,5x_{23} + 0,8x_{24} + 0,7x_{25} + 0,8x_{31} + 0,7x_{32} + 0,6x_{33} + 0,8x_{34} + \\ &0,6x_{35} + 0,7x_{41} + 0,8x_{42} + 0,7x_{43} + 0,8x_{44} + 0,8x_{45} + 0,8x_{51} + \\ &0,8x_{52} + 0,7x_{53} + 0,7x_{54} + 0,7x_{55} \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Далее, выполним решение венгерским алгоритмом [10] для нахождения минимума целевой функции и по найденной матрице на последнем шаге определяем матрицу, которая позволяет найти максимальное значение

$$\begin{pmatrix} 0,1 & [0] & 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ [0] & 0 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & [0] & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & [0] \\ 0 & 0 & [0] & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} C_{\max} &= \sum_{M_j \in M} \mu_{\max \min}^{R_{MA}}(M_j, A_j) = \mu_{\max \min}^{R_{MA}}(M_1, A_2) + \mu_{\max \min}^{R_{MA}}(M_2, A_1) + \\ &+ \mu_{\max \min}^{R_{MA}}(M_3, A_4) + \mu_{\max \min}^{R_{MA}}(M_4, A_5) + \mu_{\max \min}^{R_{MA}}(M_5, A_3) = \\ &= 0,8 + 0,9 + 0,8 + 0,8 + 0,7 = 4. \end{aligned}$$

Решение для минимаксной композиции дало четыре результата с максимальным значением целевой функции $C_{\max} = 1,3$. Заметим, значение 0,5 для функций принадлежности нечетких бинарных отношений означает высокую неопределенность выбора и может быть причиной неточных результатов. В связи с этим для использования подобного подхода требуются дополнительные критерии для отбора менеджеров.

Выводы. Успех на динамично развивающемся рынке финансовых технологий в IT сфере значительно зависит от умелого управления инвестиционным портфелем. В условиях недостатка специалистов в новых областях, руководителю проекта приходится решать задачу оптимального распределения проектов между менеджерами различных категорий с целью эффективного управления инвестиционными портфелями. Непредвзятое назначение кураторов в различных IT-секторах может играть решающую роль.

В работе были рассмотрены возможности использования максиминной и минимаксной композиции нечетких бинарных отношений, а также венгерского алгоритма для решения задачи оптимального назначения менеджеров по управлению инвестициями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Применение теории нечётких множеств к задаче формирования портфеля проектов / В.М. Аньшин, И.В. Демкин, И.М. Никонов, И.Н. Царьков // Проблемы анализа риска. Т. 5, №3. 2008. С. 8-21.
2. Денисенко А.О. Многокритериальные математические модели принятия решений на рынке ценных бумаг в условиях неопределенности / А.О. Денисенко, Е.А. Семенчин // Научный журнал КубГАУ. №64 (10). 2010.
3. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. 432 с.
4. Марковиц Г.М. Выбор портфеля // Финансовый журн. 1952. Т. 7, №1, С. 77-91.
5. Поспелов Д.А. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986. 312 с.

6. *Перепелица Д.Г.* Изучение возможностей практического использования модели оптимизации инвестиционного портфеля с применением нечётких множеств на российском финансовом рынке [Электронный ресурс] // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». 2016. Т.8, №5. Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/97EVN516.pdf> (доступ свободный).
7. *Ширяев В.В.* Модели финансовых рынков. Оптимальные портфели, управление финансами и рисками: учебное пособие / под ред. В.И. Ширяева. 2-е изд. М.: Либроком, 2015. 216 с.
8. *Zadeh L. A.* The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning III. // *Information Sciences*. 1976. Vol. 9. P. 43-80.
9. *Burkard R.E.* Assignment Problems / R.E. Burkard, M.Dell'Amico, S. Martello. SIAM, Philadelphia. 2009.
10. *Kuhn H.W.* The Hungarian Method for the assignment problem // *Naval Research Logistics Quarterly*. 1955. 2. P. 83-97.

ХИМИЯ И ХИМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 66.048.54

В. К. Леонтьев, О. Н. Кораблева, Д. А. Барзыкина

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: leontievvk@ystu.ru

ИНТЕНСИФИКАЦИЯ ПРОЦЕССА ВЫПАРИВАНИЯ

Рассмотрены теоретические методы расчета процесса теплообмена и гидравлического сопротивления колеблющихся потоков на примере процесса выпаривания кристаллизующихся растворов геотермальных вод, добываемых на территории Ярославской области.

Целью работы является определение влияния пульсации потока на значение коэффициента теплоотдачи.

Ключевые слова: выпаривание, интенсификация теплообмена, коэффициент теплоотдачи, турбулизация потока.

V. K. Leontiev, O. N. Korableva, D. A. Barzykina

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: leontievvk@ystu.ru

INTENSIFICATION OF THE VAPORIZATION PROCESS

We consider theoretical methods for calculating the process of heat exchange and hydraulic resistance of oscillating flows using the example the evaporation process of crystallized solutions of geothermal waters produced in the territory of the Yaroslavl region.

The aim of the paper is to determine the influence of flow pulsation on the value of the heat transfer coefficient.

Keywords: evaporation, heat exchange intensification, heat transfer coefficient, flow turbulence.

Для интенсификации процессов теплообмена за счет повышения коэффициента теплопередачи на практике находит достаточно широкое применение метод создания пульсационного движения теплоносителя. Коэффициент теплопередачи является функцией многих переменных: коэффициента теплопроводности и толщины стенки, наличия загрязнений на стенках подогревателя, значения коэффициентов теплоотдачи и т.д. При создании пульсации потока теплоносителя в трубах подогревателя возникают пристенные вихревые течения, в результате чего переход к турбу-

лентному режиму движения может происходить при значениях критерия Рейнольдса значительно ниже критического значения. Интенсивные колебания скорости и давления приводят к увеличению значения коэффициента теплоотдачи. Помимо увеличения коэффициента теплоотдачи при проведении процесса выпаривания кристаллизующихся растворов геотермальных вод, кристаллизация минеральных солей в условиях колеблющихся потоков протекает более интенсивно, чем в случае применения традиционных средств химической технологии [1, 2].

Влияние пульсации расхода на теплообмен представлено в работе [3], и приведенные исследования показывают эффективность пульсации как интенсификаторов теплообмена.

В нефтеперерабатывающей, нефтехимической и химической промышленности для упаривания растворов используют аппараты, в которых при проведении процесса выпаривания происходит выделение кристаллизующихся солей при прохождении циркулирующего раствора через теплообменные трубки. С целью повышения интенсивности и производительности процесса выпаривания на кафедре «Процессы и аппаратов химической технологии» Ярославского государственного технического университета была разработана конструкция выпарного аппарата с пульсатором для кристаллизующихся растворов.

Аппарат содержит трубчатый подогреватель с верхней и нижней трубными досками, входную (нижнюю) и выходную (верхнюю) растворные камеры, сепаратор, подключенный к подогревателю посредством трубы вскипания и циркуляционной трубы, оснащенный гидроциклоном. К нижней растворной камере для создания турбулизации и пульсации потока присоединен пульсатор мембранного типа. Пульсатор создает гидродинамические колебания скорости, давления, плотности среды, которые вызывают возникновение тепловых колебаний, т.е. колебания температуры среды, температуры поверхности теплообмена и теплового потока на поверхности подогревателя выпарного аппарата.

Важной характеристикой колеблющихся потоков является длина волны λ или скорость ее распространения v . В зависимости от соотношения между характерным размером поверхности и длиной волны колебаний, колеблющиеся потоки можно разделить на две группы: длинноволновые колебания и коротковолновые колебания.

При проведении процесса выпаривания кристаллизующихся растворов геотермальных вод, колебания среды сопровождается вынужденным движением. Используя законы сохранения массы и энергии и принимая во внимание законы Фурье и Ньютона, систему уравнений движения, неразрывности и энергии для сжимаемой вязкой жидкости можно записать:

$$\rho \frac{du_i}{dt} \equiv \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i \rho - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\eta - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} u \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]; \quad (1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho u) = 0; \quad (2)$$

$$\rho \frac{di}{dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \frac{\partial p}{\partial t} + q_v + \Phi_j; \quad (3)$$

$$\Phi_j = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{3} \mu \right) (\operatorname{div} u)^2 = \Phi + \eta (\operatorname{div} u)^2, \quad (4)$$

где Φ – диссипативная функция, характеризующая диссипации кинетической энергии; q_v – плотность внутренних источников тепла в единице объема; F_i – объемная сила, отнесенная к единице массе жидкости; u_i – компонента скорости на ось x_i ; μ , η , λ – коэффициенты динамической, объемной вязкости и теплопроводности жидкости; ρ и p – плотность и давление; i – энтальпия, в выражениях (1), (3), (4) используется правило: по двум повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Пульсационный поток раствора можно считать изобарным, поскольку в процессе теплообмена значительно изменяется температура жидкости, и, следовательно, плотность, тогда как давление вследствие потерь энергии изменяется незначительно по сравнению с градиентом температуры. Уравнение движения и энергии относительно возмущения скорости и давления можно записать:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \Delta u \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Delta p}{\partial x} + m \Delta u = 0, \\ \frac{\partial \Delta p}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \Delta p}{\partial x} + k p_0 \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + k \Delta p \frac{\partial u_0}{\partial x} = \Delta q (k - 1), \end{cases} \quad (5)$$

где k – показатель адиабаты $k = \frac{c_p}{c_v}$; c_p и c_v – теплоемкость при постоянном давлении и объеме соответственно.

При рассмотрении движения жидкости в трубах подогревателя выпарного аппарата, т.е. в каналах достаточно большой длины на входе кото-

рого с помощью пульсационного устройства мембранного типа создаются колебания давления или скорости [3].

Для определения степени интенсификации теплообменного процесса при создании пульсационного потока в трубном пучке выпарного аппарата был произведен расчет процесса выпаривания геотермальных вод Медягинской скважины Ярославской области. Пульсационный поток в трубах подогревателя создавался с помощью поршневого насоса простого действия. Графическое изображение изменения подачи соответствует синусоиде представленной на рис. 1.

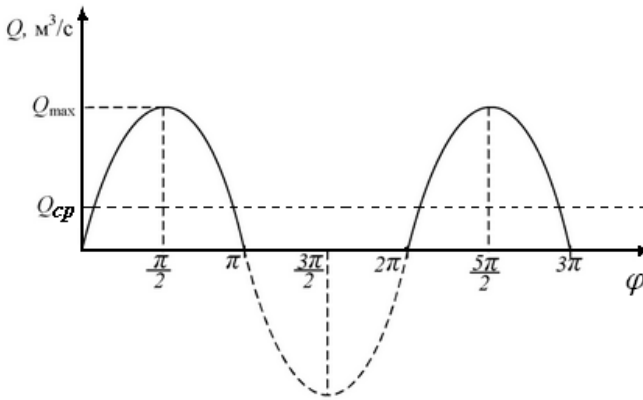


Рис. 1. Зависимость подачи насоса ... [4]

При использовании поршневого насоса для создания пульсации потока в трубном пучке подогревателя выпарного аппарата степень неравномерности подачи оценивается коэффициентом неравномерности $\sigma_Q = \frac{Q_{\text{max}}}{Q_{\text{ср}}}$, который для насоса простого действия составляет $\sigma_Q = 3,14$.

Приращение скорости движения теплоносителя в трубах будет определяться изменением подачи поршневого насоса.

Расчет коэффициента теплоотдачи с использованием пульсационного потока проводился с учетом уравнений (5). Расчеты показали, что для рассматриваемой конструкции выпарного аппарата увеличение коэффициента теплоотдачи составляет порядка 10%, при этом использование многокорпусной схемы выпаривания позволяет значительно повысить скорость потока, что еще в большей степени позволит интенсифицировать процесс выпаривания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельперин Н.И.* Основные процессы и аппараты химической технологии: в 2 кн. М.: Химия, 1981. 812 с.
2. *Касаткин А.Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии. 15-е изд. М.: Альянс, 2009. 759 с.
3. *Галицкий Б.М.* Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. М.: Машиностроение, 1977. 256 с.
4. *Башта Т.М.* Гидравлика, гидромашины и гидроприводы / Т.М. Башта, С.С. Руднев. М.: Машиностроение, 1982. 423 с.

УДК 66.048

В. К. Леонтьев, О. Н. Кorableва, М. А. Сангмамадов

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: leontievvk@ystu.ru,
korablevaon@yandex.ru, mehrid_95@mail.ru

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ДЕПРЕССИЙ

Целью работы является сравнительный анализ основных методов расчета физико-химической депрессии процесса выпаривания.

Ключевые слова: *выпаривание, полезная разность температур, поверхность теплопередачи.*

V. K. Leontiev, O. N. Korableva. M. A. Sangmamadov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: leontievvk@ystu.ru,
korablevaon@yandex.ru, mehrid_95@mail.ru

METHODS FOR CALCULATING TEMPERATURE DEPRESSION

The aim of the work is a comparative analysis of the main methods for calculating the physicochemical depression of the evaporation process.

Keywords: *evaporation, useful temperature difference, the heat transfer surface.*

Процесс концентрирования жидких растворов нелетучих веществ путем частичного удаления растворителя испарением при кипении жидкости называют выпариванием. Температура кипения растворов является

важнейшим параметром процесса выпаривания и зависит от химической природы растворенных твердых веществ и растворителя. Концентрирование растворов методом выпаривания – один из наиболее распространенных технологических процессов в химической, пищевой, металлургической и других отраслях промышленности [1].

Основным конструкционным размером выпарного аппарата является поверхность нагрева, которая определяется по основному уравнению теплопередачи:

$$F = \frac{Q}{K \cdot \Delta t_{\text{ПОЛЕЗН}}},$$

где Q – тепловая нагрузка выпарного аппарата, Вт;

K – коэффициент теплопередачи в первом корпусе, Вт/(м²·К);

$\Delta t_{\text{ПОЛЕЗН}}$ – полезная разность температур, °С.

Движущая сила процесса ($\Delta t_{\text{ПОЛЕЗН}}$) представляет собой разность между температурой конденсации греющего пара и температурой кипения раствора и учитывает температурные потери, при проведении процесса выпаривая (рис. 1). Общая величина температурных потерь для одного корпуса складывается из физико-химической (температурной депрессии) Δ' , гидростатической депрессии Δ'' [2].

$$\Delta t_{\text{ПОЛЕЗН}} = t_{\text{КОНД}} - t_{\text{К}} = \Delta t_{\text{ОБЩ}} - (\Delta' + \Delta'').$$

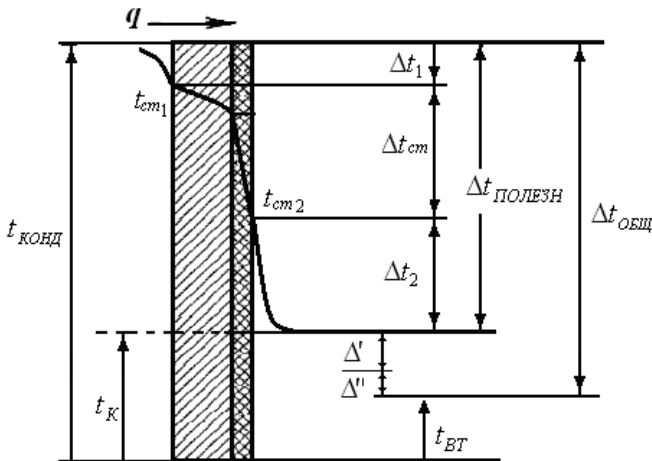


Рис. 1. Определение полезной разности температур

Увеличение температурных потерь приводит к повышению температуры кипения раствора и, как следствие, уменьшению движущей силы процесса, т.е. полезной разности температур. Потери общей разности температур в многокорпусной выпарной установке определяются суммой потерь по корпусам [3].

Правильное определение полезной разности температур обеспечивает максимальную производительность выпарной установки при минимальных значениях капитальных и эксплуатационных затрат [4]. Особенно это важно для третьего или четвертого корпусов, работающих под вакуумом, т.к. в них полезная разность температур соизмерима с депрессиями.

Температура кипения раствора всегда выше температуры кипения чистого растворителя при том же давлении, поскольку давление пара растворителя над раствором всегда ниже, чем давление над чистым растворителем. Температурной депрессией Δ' называется разность между температурой кипения раствора и чистого растворителя и увеличивается с увеличением концентрации раствора и давления. В выпарных аппаратах непрерывного действия с естественной или принудительной циркуляцией концентрация кипящего раствора близка к конечной, поэтому температурную депрессию в этих аппаратах берут для раствора конечной концентрации. При проведении процесса выпаривания периодическим способом температурная депрессия определяется при средней концентрации раствора [5].

В справочной литературе приводятся значения температурной депрессии для кипящих растворов при нормальном атмосферном давлении. При проведении процесса выпаривания при давлениях, отличных от атмосферного, для определения температурной депрессии используются несколько методов.

Если известна температурная депрессия при атмосферном давлении, то можно найти депрессию и при других давлениях по приближенной формуле Тищенко:

$$\Delta' = 16,2 \frac{T^2}{r} \Delta'_{\text{атм}},$$

где T и r – абсолютная температура кипения (К) и теплота испарения (дж/кг) для воды при данном давлении.

Второй способ определения Δ' осуществляется по эмпирическому правилу Бабо, согласно которому отношение упругости пара над раствором к упругости пара над чистым растворителем при той же температуре есть величина постоянная:

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)_t = \text{const.}$$

Если температура кипения раствора при заданной концентрации при атмосферном давлении известна, то на основании этого правила можно вычислить константу и найти температуру кипения раствора при любом давлении.

Также для определения температуры кипения раствора можно использовать общее правило линейности Павлова (Дюринга) (рис. 2) или уравнение Киреева, если известны две температуры кипения данного раствора при соответствующих давлениях:

$$\frac{t_{p_1} - t_{p_2}}{\Theta_{p_1} - \Theta_{p_2}} = K,$$

где t_{p_1} и t_{p_2} - температуры кипения раствора или органической жидкости при двух разных давлениях p_1 и p_2 ;

Θ_{p_1} и Θ_{p_2} - температуры кипения воды при тех же давлениях.

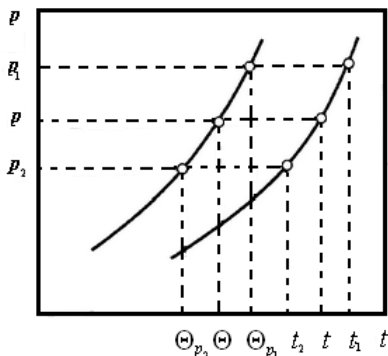


Рис. 2. Графическая интерпретация метода Дюринга [6]

Температура кипения раствора в выпарном аппарате переменна по высоте труб. Обычно среднюю температуру кипения определяют на середине высоты греющих труб с учетом гидростатической давления. Давление в среднем слое выпариваемого раствора определяется по уравнению

$$p_{cp} = p_{BT} + \frac{\rho g H}{2} (1 - \varepsilon),$$

где p_{BT} - давление вторичного пара;

ρ - плотность жидкости, кг/м^3 ;

ε - паронаполнение раствора (принимается 0,5).

В некоторых случаях суммарную физико-химическую (температурную) и гидростатическую депрессии определяют непосредственно в расчетном слое раствора (по правилу Бабо).

Для проведения сравнительного анализа представленных выше методов определения депрессий нами был произведен расчет этих величин для раствора гидроксида калия с конечной концентрацией 40 % мас. при давлении вторичного пара в последнем (третьем или четвертом) корпусе многокорпусной выпарной установки 0,015 МПа. Давление греющего пара принято 0,22 МПа.

Результаты расчетов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Значение температурных депрессий и полезной разности температур

Способ определения	Значение физико-химической (температурной) депрессии Δ' , град.	Значение гидростатической депрессии Δ'' , град.	Суммарная $\Delta' + \Delta''$, град.	Полезная разность температур $\Delta t_{\text{ПОЛЕЗН}}$, град.
Метод Тищенко	17,2	13,3	30,5	40,9
Правило Бабо	18,92	13,3	32,22	39,07
Правило Бабо в расчетном слое раствора	-	-	34,56	36,89

Расхождение в расчетах полезной разности температур по предложенным методам составляет более 10 %. Возникает вопрос, какой метод необходимо использовать при расчете выпарных установок. По литературным данным, метод Тищенко имеет максимальную погрешность вычисления и является приближенным. При использовании правила Бабо для определения температуры кипения концентрированных растворов необходимо вводить поправку Стабникова, которая учитывает теплоту растворения. Использование метода Дюринга не имеет широкого распространения, поскольку ограничено необходимостью наличия двух температур кипения раствора при различных давлениях.

На наш взгляд, наиболее рациональным является метод определения температуры кипения в расчетном слое раствора по правилу Бабо, который позволяет рассчитать поверхность выпарной установки с некоторым запасом, что обеспечит, в конечном счете, более надежную работу всей выпарной установки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Касаткин А. Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии. 15-е изд. М.: Альянс, 2009. 759 с.

2. Павлов К.Ф. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии / К.Ф. Павлов, П.Г. Романков, А.А. Носков. М.: Альянс, 2005. 576 с.
3. Плановский А.Н. Процессы и аппараты химической и нефтехимической промышленности / А.Н. Плановский, П.И. Николаев. 2-е изд. М.: Химия, 1972. 498 с.
4. Гельперин Н.И. Основные процессы и аппараты химической технологии: в 2 кн. / Н. И. Гельперин. М.: Химия, 1981. 812 с.
5. Плановский, А.Н. Процессы и аппараты химической технологии / А.Н. Плановский, В.Н. Рамм, С.З. Каган. 4-е изд. М.: Химия, 1967. 848 с.
6. Скобло, А.И. Процессы и аппараты нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности / А.И. Скобло, И.А. Трегубова, Н.Н. Егоров. 2-е изд. М.: Химия, 1982. 584 с.

УДК 628.4.045

В. М. Макаров, С. З. Калаева, Н. Л. Маркелова

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, *email: makarovvm@ystu.ru*

ВЛИЯНИЕ ТИПА ВУЛКАНИЗУЮЩЕЙ ГРУППЫ КАУЧУКО-РЕГЕНЕРАТНЫХ СМЕСЕЙ НА КАЧЕСТВО РЕЗИН

В статье рассмотрена проблема существенного улучшения качества каучуко-регенератных резин за счет уменьшения степени сульфидности поперечных связей, создаваемых малосернистой вулканизирующей группой. Особенно улучшаются динамические показатели.

Ключевые слова: каучук, регенерат, резиновая смесь, вулканизация, поперечные связи, физико-механические показатели.

V. M. Makarov, S. S. Kalaeva, N. L. Markelova

*Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, email: makarovvm@ystu.ru*

THE INFLUENCE OF TYPE OF CURING GROUP CAOUTCHOU-REGENERATED MIXTURES ON THE QUALITY OF THE RUBBER

The paper considers the problem of substantial improvement of caoutchouc-regenerated rubber by reducing the degree of cross-linking sulfides created low-sulfur vulcanizing agents group. Especially improved dynamic performance.

Keywords: rubber, reclaim, rubber compound, vulcanization, cross-links, physical and mechanical properties.

К 2019 году все регионы России должны перейти на новую систему обращения с отходами, которая предполагает достижение значительно большей степени их переработки. Будет создана расширенная сеть приемных пунктов с оплатой отходов по привлекательным для населения базовым нормативам. Это должно привести к уменьшению количества несанкционированных свалок и вовлечь вторичное сырье в переработку с получением востребованных продуктов.

Получение и применение регенерата вносит значительный вклад в решение проблемы вторичного использования амортизованных резин, в основном, автомобильных покрышек. Известно, что введение регенерата в состав резиновых смесей значительно влияет на свойство резин, ухудшая ряд важных показателей [1]. При этом требуется корректировка вулканизирующей группы, которая до сих пор производится без учета особенностей молекулярного строения регенерата и условий его совулканизации.

Как отмечалось [2], в регенерате водонейтрального способа получения поперечные серные связи представлены в виде моно- и дисульфидов. Наличие в регенерате зафиксированной структуры вызывает необходимость ее учета при составлении рецептуры смесей с его участием и, прежде всего, при подборе вулканизирующей группы. Регенерат можно представить на фоне каучука в виде жесткого шаровидного включения со сложившейся трехмерной структурой (серные связи малой сульфидностью) и меньшей неопределенностью, чем окружающие молекулы каучука. Это утверждение бесспорно в случае применения регенерата на основе того же каучука. Можно предположить, что при совулканизации каучука с регенератом концентрация серных связей на границе между регенератом и каучуком вследствие меньшей неопределенности регенерата будет значительно меньше, чем в каучуке и частицах регенерата. Если в совулканизации осуществляется вулканизирующей группой, образующей преимущественно полисульфидные связи, прочность которых меньше моно-дисульфидных, границы раздела каучук-регенерат будет слабым местом, и разрушение вулканизата будет происходить, прежде всего, на этой границе. Если это предположение верно, то для повышения работоспособности каучук-регенератных резин необходимо повысить прочность связей на границе каучук-регенерат.

Этого можно достигнуть применением вулканизирующих групп, обеспечивающих образование преимущественно связей низкой сульфидности, близкие по прочности связи в регенерате, а, в целом, резина будет иметь более однородную вулканизационную структуру, что должно сказаться на ее работоспособности, особенно при динамических нагрузках. Этот вывод нами проверен экспериментально. Были приготовлены смеси на основе

СКС-30 (нетермопластифицированного), рецептура которых и физико-механические показатели вулканизатов приведены в табл. 1.

Из таблицы 1 видно, что вулканизаты имеют приблизительно одинаковый равновесный модуль и физико-механические показатели. Из них были приготовлены регенераты водонейтральным способом по режиму 180°C, 8 часов с применением в качестве мягчителя 10%-ной газогенераторной смолы. Девулканизат обрабатывался 10 минут на холодных лабораторных вальцах.

Таблица 1. Состав смесей и физико-механические показатели вулканизатов на основе нетермопластифицированного СКС-30 с различными типами поперечных связей

Ингредиенты и наименование показателей	Тип вулканизата		
	К-1	К-2	К-3
СКС-30 нетермопластифицированный	100,0 мас. ч.	100,0 мас. ч.	100,0 мас. ч.
Стеариновая кислота	1,0	1,0	1,0
Белила цинковые	5,0	5,0	5,0
Тиурам	-	1,5	-
Дифинилгуанидин (ДФГ)	1,0	-	-
Сера	4,0	-	-
Время вулканизации, мин и температура, °С	30'/143	10'/143	300'/200
Предел прочности при разрыве, МПа	3,6	3,8	3,6
Модуль при 100% удлинения, МПа	0,90	1,00	0,98
Модуль при 200% удлинения, МПа	1,25	1,30	1,30
Относительное удлинение, %	570	520	620
Остаточное удлинение, %	20	24	32
Равновесный модуль, E_{∞} , МПа	0,65	0,62	0,58

Затем полученные регенераты вулканизовались с использованием первоначальных вулканизирующих групп. Термовулканизат К-3 получался при повышенной температуре и времени для достижения одинакового модуля с резиной из регенерата К-1. При вулканизации регенерата из К-2 потребовалось также несколько увеличить дозировку тиурама. Была также проведена совулканизация полученных регенератов с каучуком СКС-30 в соотношении 50:50 с применением вулканизирующих групп, близких к первоначальным. Рецептура указанных смесей и физико-механические показатели вулканизатов приведены в табл. 2. Данные, приведенные в табл. 2, указывают на то, что вулканизаты регенератов имеют более подвижную структуру в том случае, когда вулканизирующая группа образует связи, близкие по прочности имеющимся в регенерате (вулканизаты 2,3). Подвижность цепей вулканизатов, полученных как из одного регенерата, так и

из смеси его с каучуком, имеющих одинаковое количество поперечных связей (величина равновесного модуля), оценивали по величине температуры хрупкости, поскольку она должна быть тем ниже, чем труднее ликвидировать высокоэластические деформации.

Таблица 2. Рецепт и физико-механические показатели вулканизатов регенератов на основе СКС-30, а также смесей регенератов с каучуком СКС-30 в соотношении 50:50 массовых частей

Ингредиенты и наименование показателей	Тип вулканизата						
	№1	№2	№3	№4	К-1	К-2	К-3
СКС-30 нетермопластифицированный	-	-	-	-	50,0	50,0	50,0
Регенерат №1, полученный из резины К-1	100,0	-	-	100,0	50,0	-	-
Регенерат №2, полученный из резины К-2	-	100,0	-	-	-	50,0	-
Регенерат №3, полученный из резины К-3	-	-	100,0	-	-	-	50,0
Стеариновая кислота	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
Белила цинковые	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0
Тиурам	-	2,1	-	1,6	-	1,85	-
Дифенилгуанидин (ДФГ)	1,0	-	-	-	1,0	-	-
Сера	4,0	-	-	-	4,0	-	-
Режим вулканизации, мин, и температура, °С	25'14 3	10'1 43	300'2 20	10'1 43	30'1 43	10'1 43	420' 220
Предел прочности при разрыве, МПа	3,31	3,22	2,76	3,10	1,70	3,60	2,90
Модуль при 100% удлинения, МПа	1,00	1,06	1,02	1,04	0,85	0,86	0,84
Относительное удлинение, %	417	460	475	443	500	530	620
Остаточное удлинение, %	12,4	16	21	15,7	48	33	51
Температура хрупкости, °С	-34	-45	-46	-42	-43	-52	-52
Равновесный модуль E_{∞} , МПа	0,7	0,745	0,73	0,741	0,53	0,536	0,51

Вулканизаты №1 и №4 получены на основе одного регенерата с различной вулканизирующей группой. Для реализации хрупкого разрушения в данном случае температуру надо было понизить на 8°С.

При совулканизации каучука и регенерата различными вулканизирующими группами показано, что в случае вулканизатов КР-2 и КР-3, где вновь образующиеся поперечные связи по прочности равны связям, имеющимся в регенерате, не только выше подвижность всей трехмерной сетки вулканизатов, но и выше прочность и относительное удлинение по сравнению с вулканизатом К-1, где серные связи в регенерате отличаются от вновь образующихся полисульфидных при вулканизации каучуко-регенератной смеси.

Таким образом, результаты испытаний подтверждают ранее высказанное предположение о большей подвижности структуры каучуко-регенератных вулканизатов в случае близкой сульфидности связей в регенерате и вновь образовавшихся связей.

Для проведения эксперимента по определению работоспособности вулканизатов из регенерата при использовании различных вулканизирующих групп был использован регенерат из резины на основе натурального каучука, полученный водонейтральным способом при температуре 182°C за 8 часов в присутствии 7% газогенератной смолы. Вулканизат был подвергнут динамическим испытаниям. Результаты представлены в табл. 3. Резкое различие в типах связей этих вулканизатов видно из рис. 1, где сняты ультрафиолетовые (УФ) спектры ненаполненных вулканизатов регенерата на основе натурального каучука (НК) [3], полученных с применением различных вулканизирующих групп. K – коэффициент поглощения, равный отношению оптической плотности к толщине пленки образца.

Таблица 3. Показатели резин из регенерата на основе натурального каучука

Показатели, ингредиенты	Тип вулканизата	
	№1	№2
Вулканизирующая группа	Тиурам – 3 мас.ч	Сера – 2 мас.ч.;ДФГ – 1 мас.ч.
Предел прочности при разрыве, МПа	7,3	7,45
Модуль при 200% удлинения, МПа	5,5	5,25
Относительное удлинение, %	530	507
Остаточное удлинение, %	24	24
Равновесный модуль, МПа	3,2	3,02
Динамическая выносливость при многократном растяжении, тыс. циклов:		
150% удлинении	10,7	4,0
200% удлинении	3,75	2,25
Сопrotивление разрастанию трещин при многократном изгибе, тыс. циклов	47,5	8,75
Коэффициент старения при 70°C, 9 ч:		
по пределу прочности	0,72	0,60
по относительному удлинению	0,73	0,57

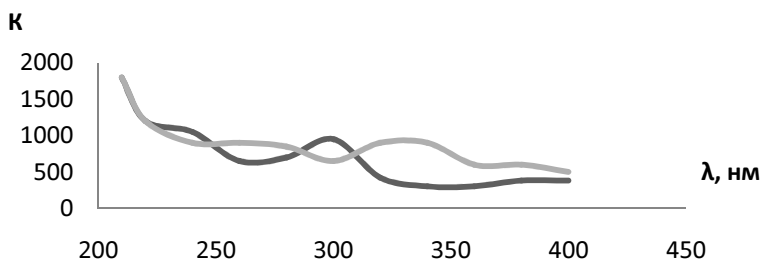


Рис. 1. УФ-спектры ненаполненных вулканизатов регенерата на основе НК, полученных с применением различных вулканизирующих групп:
1 – тиурам – 3 мас. ч.; 2 – сера – 2 мас. ч., ДФГ – 1 мас. ч.

Видно, что в случае вулканизации тиурамом (кривая 1) присутствуют моно-дисульфиды (поглощение в области 225-250 нм) и тетрасульфиды. При вулканизации серой и ДФГ (кривая 2) ясно видно наличие гекса-сульфидов (320 нм) и серных связей более высокой сульфидности (380 нм) [3]. Другие ингредиенты на 100 мас.ч. регенерата – стеариновая кислота – 1 мас.ч и оксид цинка – 5 мас.ч.

Вулканизаты обоих типов имели одинаковый равновесный модуль. При сравнении полученных результатов видно, что при практически одинаковой прочности и относительном удлинении вулканизаты с тиурамом имеют лучшие показатели по сопротивлению многократному растяжению при 150% удлинении в 2,7 раза, при 200% удлинении – в 1,6 раза, а по сопротивлению разрастанию трещин при многократном изгибе – в 5,4 раза.

Проведенное исследование показывает, что при наличии вновь образованных более прочных, чем полисульфидные, связей, аналогичных имеющимся в регенерате, обеспечивается более работоспособная структура резины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шохин И.А.* Свойства каучуко-регенератных резин / И.А. Шохин, Я.Н. Каплунов // Каучук и резина. 1959. №3. С. 33-35.
2. *Макаров В.М.* Исследование типа серных связей в регенерате различных способов получения / В.М. Макаров, Н.Д. Захарова, Г.И. Кострыкина // 17-я науч. конф. Яросл. технол. ин-та: тез. докл., 23-24 сентября 1965. Ярославль: Изд-во ЯТИ, 1965. С. 69-71.
3. *Гиллем А.* Электронные спектры поглощения органических соединений / А. Гиллем, Е. Штерн. М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1957. 205 с.

УДК 66.048:541.1

В. В. Макарьин

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, *e-mail*: *vfak@yandex.ru*

ОПИСАНИЕ ПАРОЖИДКОСТНОГО РАВНОВЕСИЯ АЗЕОТРОПНЫХ СМЕСЕЙ

Проведено моделирование парожидкостного равновесия двухкомпонентных азеотропных смесей на основе химического и физико-химического равновесия. Приведены картины фазовых портретов.

Ключевые слова: парожидкостное равновесие, химическое равновесие, азеотропы, фазовые портреты.

V. V. Makaryin

*Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vfak@yandex.ru*

THE DESCRIPTION OF VAPOR-LIQUID BALANCE OF AZEOTROP MIXES

Modelling vapor-liquid balance two-componential azeotrop mixes is carried out on the basis of chemical and physical and chemical balance. Pictures of phase portraits are given.

Keywords: *vapor-liquid balance, chemical balance, azeotrop, phase portraits.*

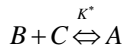
Точное описание парожидкостного равновесия (ПЖР) имеет важное значение в процессах химической технологии и нефтехимического синтеза при расчетах разделительного оборудования и при проектировании химико-технологических схем. Парожидкостное равновесие достаточно хорошо воспроизводится в так называемых идеальных случаях, когда компоненты не взаимодействуют между собой и поведение смеси подчиняется закону Рауля [1, 14 с.]. При не очень значительных отклонениях от него (такие смеси названы неидеальными) можно использовать, например, модель Вильсона, с помощью которой по энергетическим параметрам бинарного взаимодействия компонентов можно рассчитывать равновесие многокомпонентных смесей [1, с. 25]. Однако по этим моделям не представляется возможным определить составы паровой фазы при наличии азеотропов. Следует также отметить, что в настоящее время практически отсутствуют

универсальные подходы для описания парожидкостного равновесия смесей, обладающих азеотропными свойствами. Поэтому данное исследование посвящено разработке направления, позволяющего оценивать равновесные составы жидкости и пара смесей, содержащих азеотропы.

В основу метода положена идея о равновесном взаимодействии между реагентами системы и образовании в результате обратимой химической реакции псевдокомпонентов (назовем их азеотропами), которые в паровой фазе полностью разлагаются и отсутствуют.

Опишем сначала химическое равновесие.

Предположим, что при смешении чистых компонентов B и C в результате обратимой химической реакции



образуется компонент A , где K^* - константа равновесия [1].

Тогда, равновесные концентрации A^* , B^* , C^* будут связаны соотношениями (без учета неэквимолекулярности реакции)

$$B^* = B_0 - A^*, \quad C^* = C_0 - A^*,$$

где B_0 и C_0 - начальные концентрации компонентов B и C .

Из закона действия масс

$$(B_0 - A^*)(C_0 - A^*) = K^* \cdot A^*. \quad (1)$$

Раскрывая скобки и преобразуя выражение (1), получим для A^* квадратное уравнение

$$(A^*)^2 - (B_0 + C_0 + K^*)A^* + B_0C_0 = 0. \quad (2)$$

Дискриминант уравнения (2) $D = b^2 - 4B_0C_0$, где обозначено $b = B_0 + C_0 + K^*$. После преобразования получаем

$$D = (K^*)^2 + (B_0 + C_0)K^* + (B_0 - C_0)^2,$$

из чего следует, что D будет положительным при всех значениях переменных. Корни уравнения (2) имеют вид

$$\frac{b \pm \sqrt{D}}{2}. \quad (3)$$

Так как равновесная концентрация компонента A не должна быть больше суммы начальных концентраций $B_0 + C_0$, то в (3) выбираем знак (-). Таким образом, равновесная концентрация компонента A :

$$A^* = \frac{B_0 + C_0 + K^* - \sqrt{(B_0 + C_0 + K^*)^2 - 4B_0C_0}}{2}.$$

Опишем теперь парожидкостное равновесие смеси, в которой происходит взаимодействие компонентов по реакции [1].

Примем следующие допущения:

1) В системе устанавливается парожидкостное и химическое равновесие:

2) Равновесная реакция (1) протекает только в жидкой фазе;

3) Компонент A полностью отсутствует в паровой фазе ввиду протекания мгновенной реакции его разложения.

4). Смесь идеальная и подчиняется закону Рауля.

Для предварительного анализа и для упрощения процедуры расчета концентраций компонентов в паровой фазе будем использовать относительные летучести (α):

$$Y_i = \frac{\alpha_i x_i}{\sum_i \alpha_i x_i}. \quad (4)$$

Тогда мольные доли компонентов B и C в паровой фазе будут записаны в виде

$$Y_B = \frac{Y_{B,A} + Y_{A,A}}{S}, \quad Y_C = \frac{Y_{C,A} + Y_{A,A}}{S},$$

где $S = Y_{B,A} + Y_{C,A} + 2Y_{A,A}$ - суммарное количество молей всех компонентов после разложения компонента A , $Y_{B,A}$ и $Y_{C,A}$ - мольные доли компонентов B и C , полученные при расчете парожидкостного равновесия.

По предложенной модели были рассчитаны различные варианты парожидкостного и химического равновесия при различных соотношениях относительных летучестей компонентов и констант химического равновесия.

Картинки полученных фазовых портретов представлены на рис. 1-6.

Рассмотрим варианты, получаемых фазовых портретов в зависимости от соотношения относительных летучестей компонентов и соотношения констант химического равновесия

1. Относительная летучесть компонента A (азеотропа) наибольшая.

Как видно из рис. 1 при низкой относительной летучести вещества C с увеличением величины константы равновесия точка азеотропа смещается вниз (в область низких концентраций компонента C). При промежуточной относительной летучести вещества C (рис. 2) с увеличением значения константы равновесия точка азеотропа смещается вверх (в область высоких концентраций компонента C).

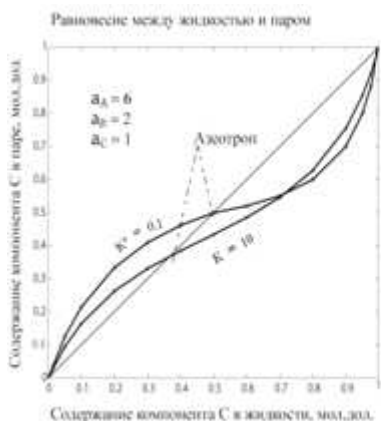


Рис. 1. $\alpha_A > \alpha_B > \alpha_C$

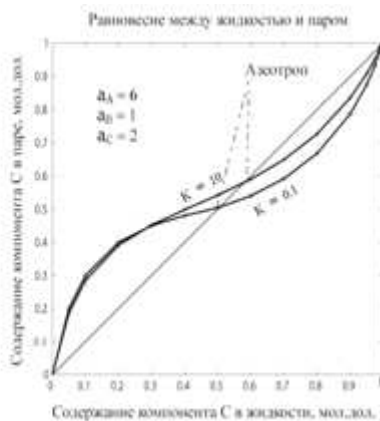


Рис. 2. $\alpha_A > \alpha_B < \alpha_C$

2. Относительная летучесть компонента А (азеотропа) наименьшая.

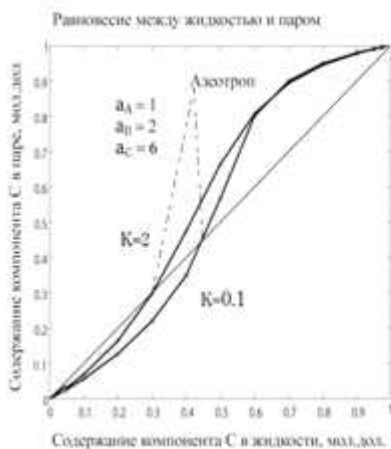


Рис. 3. $\alpha_A < \alpha_B < \alpha_C$

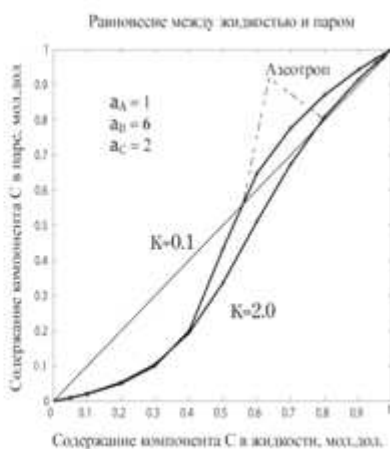
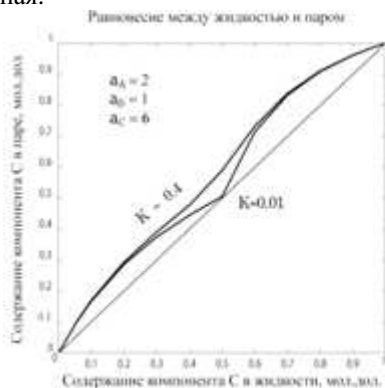
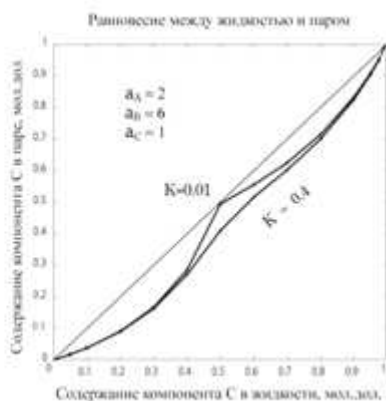


Рис. 4. $\alpha_A < \alpha_B > \alpha_C$

Как видно из рис. 3, 4, изменение величины константы химического равновесия компонентов влечет за собой изменение состава азеотропа. При различных относительных летучестях компонентов положительный азеотроп может переходить в отрицательный.

3. Относительная летучесть компонента А (azeотропа) промежуточная.

Рис. 5. $\alpha_B < \alpha_A < \alpha_C$ Рис. 6. $\alpha_C < \alpha_A < \alpha_B$

Из рис. 5, 6 следует, что кривая парожидкостного равновесия пересекает диагональ x - y только при условии равенства константы химического равновесия нулю, т.е. при полном смещении равновесия в сторону образования компонента А (azeотропа), другими словами, при этих условиях смесь будет практически «zeотропна». Следует отметить, что похожие картины ПЖР были представлены на основе термодинамико-топологического анализа В.Т. Жаровым и А.А. Серафимовым в работе [2, с. 116]. Следует также подчеркнуть, что представленный подход можно использовать для расчета ректификации azeотропных систем, как совмещенных реакционно-ректификационных процессов [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кафаров В.В.* Основы массопередачи: Учебник для студентов вузов. 3-е изд., перераб и доп. М.: Высш. школа, 1979. 439 с.
2. *Жаров В.Т.* Физико-химические основы дистилляции и ректификации / В.Т. Жаров, Л.А. Серафимов. Л.: Химия, 1975. 240 с.
3. *Макарьин В.В.* Математическое моделирование и анализ тепловых затрат на хемосорбционно-ректификационный процесс с параллельно-последовательной реакцией / В.В. Макарьин, О.В. Уткин // Теоретические основы химической технологии. 1989. Т.23, вып. 1. С.106-109.

УДК 678.046

**Е. Л. Никитина, В. М. Макаров, О. Ю. Соловьева,
А. Н. Цыбанов, А. С. Данилова, А. А. Саповский**

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: nikitinael@ystu.ru

ПОВЫШЕНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ПОДГОТОВИТЕЛЬНОГО УЧАСТКА РЕЗИНОВЫХ СМЕСЕЙ

Предложен способ активации ингредиентов вулканизирующей группы с целью увеличения их взаимодействия друг с другом и последующем снижении дозировки компонентов в рецептуре резиновых смесей. Установлено увеличение когезионной прочности резиновых смесей, скорости вулканизации, повышение физико-механических показателей резин.

Ключевые слова: активация, вулканизирующая группа, когезионная прочность, скорость вулканизации.

**E. L. Nikitina, V. M. Makarov, O. U. Solovyva,
A. N. Cibanov, A. S. Danilova, A. A. Sapovskiy**

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: nikitinael@ystu.ru

INCREASE OF ECOLOGICAL SAFETY OF A PREPARATORY SITE OF RUBBER MIXES

We propose a method for activating curing ingredients groups to increase their interaction with each other and reduction the content of components in the formulation of rubber compounds. The increase cohesive strength of rubber mixtures, curing rate, improvement of physic-mechanical properties of rubbers was obtained.

Keywords: activation, curing group, cohesive strength, curing rates.

Резиновая смесь является сложной многокомпонентной системой, в состав которой входят каучуки и различные ингредиенты, распределенные в массе каучука. Большинство порошкообразных компонентов вводят в смесь в виде более или менее крупных агломератов, поэтому процесс смешения сопровождается диспергированием (измельчением) этих компонентов. За время смешения достигнуть равномерного распределения всех ингредиентов практически невозможно. В связи с этим поиск новых подходов и способов повышения эффективности взаимодействия компонентов резиновой смеси перед стадией смешения является актуальной и практически важной задачей [1, 2].

Особенно важен хороший контакт при взаимодействии ингредиентов, представленных в рецептуре резиновой смеси в наименьшем количестве, например, компонентов вулканизирующей группы, определяющей кинетику и важнейшие свойства резин. Поэтому для реализации функционального назначения и обеспечения необходимого контакта фаз ускорителей и активаторов вулканизации приходится, фактически, применять их повышенные дозировки по сравнению со случаем их незатрудненного контакта, который при действующей технологии смешения не может быть реализован. С экологической точки зрения допускается излишнее обращение в производстве ускорителей и активатора вулканизации, представляющих опасность для человека и окружающей среды [3].

Предложен способ активации ускорителя и активатора вулканизации в электромагнитном аппарате непосредственно перед стадией смешения с тем, чтобы активировать возбужденное состояние структуры компонентов и сообщить им некоторую дополнительную энергию активации. Предполагается, что в результате активации ускоритель и активатор вулканизации с большей степенью вероятности прореагируют друг с другом и возникнет возможность пропорционально снизить их дозировки и, таким образом, себестоимость изготовления резиновой смеси.

Полнота реакции активатора вулканизации с ускорителем важна для вулканизации резиновых смесей. Активатор имеет очень большое значение, т.к. позволяет повысить эффективность присоединения серы к эластомеру, влияет на концентрацию и характер образующихся поперечных связей, направляя их в сторону меньшей сульфидности. При использовании ускорителей для вулканизации каучуков общего назначения присутствие активатора (оксида цинка) обязательно. Но распределение оксида цинка в каучуке происходит более затруднительно, чем органического ускорителя. Поэтому очевидно, что в микрообъемах ускоритель и активатор не будут находиться в тех соотношениях, которые указаны в рецептуре резиновой смеси, и что эта их дозировка явно завышена для достижения желаемого результата после вулканизации. По вышеуказанным соображениям активатор может быть отделен от ускорителя в каких-то микрообъемах. Важно то, что оксид цинка реагирует с ускорителем, образуя металлосодержащие соединения, например, меркаптиды цинка $MSZnSM$, рассматриваемые как источник генерации фрагментов MS_x , образующих в полимере полисульфидные подвески ускорителей и в дальнейшем поперечные связи. Предполагается, что предварительная механохимическая обработка (активация) компонентов вулканизирующей группы (ускорителя и активатора вулканизации) в электромагнитном аппарате повысит эффективность их взаимодействия за счет комплексного взаимодействия: интенсивного перемешивания, диспергирования, высоких локальных давлений.

Электромагнитный аппарат представляет собой камеру, окруженную электромагнитной катушкой, на которую подается напряжение 220В с частотой электрического тока 50 Гц, индукцией переменного магнитного поля 0,3 Тл, напряженностью магнитного поля 450 А/см, создаваемого магнитными элементами, изготовленными из магнитотвердого материала. При включении индуктора в электрическую сеть рабочие элементы, подвергаются воздействию магнитного поля и приводятся в интенсивное хаотическое движение, передавая энергию твердым сыпучим материалам (компонентам резиновых смесей). Передача энергии в этом случае происходит за короткое время (1-2 мин), что в обычных условиях затруднено [4]. Происходящее при этом диспергирование ингредиентов приводит к увеличению их удельной поверхности с образованием значительного количества активных центров, определяющих их реакционную способность. Повышение эффективности взаимодействия ингредиентов вулканизирующей группы выражается в увеличении когезионной прочности резиновых смесей, повышении скорости вулканизации, сокращении времени достижения оптимума вулканизации, в увеличении степени сшивания и времени до наступления реверсии. Такое влияние процесса предварительной активации ускорителя и активатора вулканизации на основные характеристики резиновых смесей и резин позволяет уменьшить их дозировки.

Активации были подвергнуты ускоритель вулканизации (сульфенамид Ц) и активатор (оксид цинка), взятые в количестве 2 и 5 мас.ч. на 100 мас.ч. каучука соответственно. Обработка ингредиентов осуществлялась в электромагнитном аппарате в течение 2 мин, после чего они вводились в ненаполненную резиновую смесь на основе каучука СКИ-3. Эффект активации проявился в повышении когезионной прочности, на что указывает увеличение комплексного динамического модуля G^* на 47%, увеличение разницы между максимальным и минимальным крутящим моментом ($M_n - M_L$), которая пропорциональна количеству образующихся при вулканизации поперечных связей на 28%, а также в снижении скорости реверсии на 43%. Высокая когезионная прочность необходима для обеспечения целостности невулканизованных заготовок. Замедление реверсии свидетельствует о возможности вулканизации крупногабаритных изделий в течение более длительного периода без опасения перевулканизации.

В смесь на основе СКИ-3, содержащую активированные в электромагнитном аппарате сульфенамид Ц и оксид цинка в дозировках 2 и 5 мас.ч. соответственно, был введен технический углерод N330 в количестве 50 мас.ч. на 100 мас.ч. каучука. Эффект активации проявился в значительном увеличении когезионной прочности, увеличении комплексного динамического модуля – на 47% при неизменной скорости сшивания и реверсии. Активированные в электромагнитном аппарате сульфенамид Ц и

оксид цинка были введены в ненаполненную резиновую смесь на основе СКИ-3 в дозировках, уменьшенных на 30%. Установлено увеличение комплексного динамического модуля на 60%, а $(M_n - M_L)$ - на 33% при снижении скорости реверсии на 50%. Такие же сниженные дозировки активированных ингредиентов были использованы в смесях, наполненных теухглеродом N330 в количестве 50 мас.ч. на 100 мас.ч. каучука. Эффект активации проявился в увеличении G^* на 23%, а степени сшивания на 47%. Таким образом, в результате механохимической обработки сыпучих ингредиентов увеличивается химическая активность обрабатываемых веществ.

Предполагается, что при воздействии движущихся рабочих элементов происходит изменение сегментальной подвижности фрагментов молекулы ускорителя и деформации кристаллической решетки оксида цинка, нарушающие равновесное состояние молекул. В результате взаимодействия рабочих тел с обрабатываемым материалом возникает ряд эффектов, которые наряду с механическим и тепловым воздействием непосредственно влияют на вещество, изменяя его физико-химические свойства. Рассматриваемые эффекты, возникающие в рабочей зоне аппарата, отличаются очень высокой энергетикой и высоким ударным воздействием вращающихся элементов на обрабатываемый материал [5]. Для подтверждения, указанных изменений в молекулярной структуре, исследованы ИК-спектры наиболее распространенного ускорителя вулканизации дибензотиазолдисульфид (альтакса).

Механохимической активации в течение 2 мин с различным количеством рабочих элементов в реакторе (10-90% от реакционной смеси), подвергался ускоритель серной вулканизации – дибензотиазолдисульфид. Изменения молекулярной структуры дибензотиазолдисульфид оценивалось по ИК-спектрам на Фурье спектрофотометре RX1 фирмы Perkin Elmer. Образцы для ИК-спектроскопии в таблетке готовили прессованием дибензотиазолдисульфид с микрокристаллическим бромидом калия в пропорции 1:50. Наибольшие изменения углеродного скелета отмечены в области $1430-1468 \text{ см}^{-1}$, как области наиболее чувствительной к природе заместителей в ароматическом кольце. С увеличением количества рабочих тел в реакционной зоне наблюдаются пространственные изменения конформации молекулы, увеличивается уплотнение отдельных фрагментов структуры, которые выражены в области $1430-1468 \text{ см}^{-1}$. Из табл. 1 видно, что с увеличением количества рабочих тел в реакционной зоне наблюдается наибольшее уменьшение полос поглощения в области 1454 см^{-1} , относящиеся к колебаниям CH_2 - группы. Отмечено также наибольшие изменения полос поглощения в области $1422-1430$, обусловленные С-С валентными ароматическими скелетными колебаниями комбинированные с С-Н асимметричными плоскостными деформационными колебаниями. Данные изменения согласуются с уменьшением отношения оптической плотности

полос поглощения образца, обработанного в электромагнитном аппарате, к оптической плотности полос поглощения дибензотиазолдисульфида, не подвергавшемуся механохимической обработке.

Таблица 1. Изменение полос поглощения в ИК-спектре дибензотиазолдисульфида, активированного в электромагнитном аппарате.

Отнесение полос поглощения	Количество рабочих элементов, %		
	30	64	97
Д1429/Дисх	0,873	0,805	0,805
Д1468/Дисх	0,878	0,813	0,813
Д1454/Дисх	0,977	0,818	0,818

С технологической точки зрения было целесообразно оценить продолжительность сохранения эффекта активации с тем, чтобы определить возможность выполнения данной операции за пределы подготовительного производства, что не нарушило бы традиционную систему развески сыпучих ингредиентов.

Оценка проводилась по характеристикам ИК спектров, снятых через различные промежутки времени на примере дибензотиазолдисульфида. Установлено, что в начальный момент времени происходит уменьшение полос поглощения в области $1428-1465\text{ см}^{-1}$, свидетельствующее о пространственном изменении конформации молекулы, уплотнении отдельных фрагментов структуры. В дальнейшем происходит постепенное восстановление состояния молекулы до равновесного в течение 7 дней с момента начала активации. Аналогичное состояние характерно и для активированного в течение 2 мин. оксида цинка. В результате перехода молекулы в возбужденное состояние, имеют место уплотнения отдельных фрагментов структуры, наблюдаемых в области $536-508\text{ см}^{-1}$ и сохранением эффекта активации в течение 7 дней, который усиливается при дополнительной и длительной обработке.

Таким образом, анализ полученных данных показывает, что использование электромагнитной обработки ускорителя и активатора вулканизации приводит к увеличению когезионной прочности резиновых смесей, более позднему наступлению реверсии, повышению скорости вулканизации и возможности снижения дозировки компонентов вулканизирующей группы, что, несомненно, приводит к удешевлению стоимости резиновых смесей и общему снижению потребления веществ, представляющих опасность для человека и окружающей среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кошелев Ф.Ф. Общая технология резины / Ф.Ф. Кошелев, А.Е. Корнев, А.М. Буканов. М.: Химия, 1978. С. 528.

2. *Мухутдинов А.А.* Экологические аспекты модификации ингредиентов и технологии производства шин /А.А. Мухутдинов, А.А. Нелюбин, Р.С.Ильясов, Г.М. Ищенко; под ред. А.А. Мухутдинова. Казань: Изд-во “ФЭН”, 1999. С. 400.
3. *Фроликова В.Г.* Источники канцерогенных и токсических веществ в шинной промышленности / В.Г. Фроликова, С.М. Кавун, М.М. Донская // Простор. 2000. №3.С. 65-74.
4. *Никитина Е.Л.* Использование электромагнитных аппаратов для защиты окружающей среды / Е.Л.Никитина, М.Е. Касалимова, Ю.Т. Гайнулина, А.А Шевелев // 65-я Всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с междунар. участием: тез. докл. Ярославль: ЯГТУ, 2012. С.191.
5. *Шевелев А.В.* Нейтрализация кислых стоков в аппарате с магнитно-кипящим слоем / А.В. Шевелев, Г.А. Ефимова, В.М. Макаров, В.Ф. Лузев // Сб. науч. тр. Междунар. науч.-техн. конф. “Современные тенденции в науке: новый взгляд”. Тамбов: Изд-во ТГУ, 2011. С. 183-184.

УДК 678.7

**М. Е. Соловьев, В. В. Власов, А. Б. Раухваргер,
М. М. Осипова**

Ярославский государственный технический университет
Россия, Ярославль, e-mail: soloviev56@gmail.com, osip.mahitch@yandex.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕТИКИ СЕРНОЙ ВУЛКАНИЗАЦИИ РЕЗИНОВЫХ СМЕСЕЙ НА ОСНОВЕ НЕНАСЫЩЕННЫХ КАУЧУКОВ

Предложена математическая модель вулканизации резиновых смесей на основе ненасыщенных каучуков, включающая систему кинетических уравнений, описывающую изменение концентраций компонентов вулканизирующей группы в процессе вулканизации. Формальная схема реакций вулканизации предложена на основании квантово-химического моделирования радикальных реакций образования сульфидирующего комплекса, его взаимодействия с каучуком, образования и распада поперечных связей.

Ключевые слова: резиновые смеси, серная вулканизация, моделирование.

**М. Ye. Soloviev, V. V. Vlasov, A. B. Rauhvarger,
M. M. Osipova**

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: soloviev56@gmail.com, osip.mahitch@yandex.ru

MODELING OF KINETICS OF SULFUR VULCANIZATION OF RUBBER COMPOUNDS ON THE BASIS OF UNSATURATED RUBBER

A mathematical model of rubber vulcanization on the basis of unsaturated rubbers is proposed, which includes a system of kinetic equations describing the variation in the concentrations of the components of the curing group during the vulcanization process. The formal scheme of the reactions of vulcanization is proposed on the basis of quantum-chemical modeling of radical reactions of formation of a sulphiding complex, its interaction with rubber, the formation and breakdown of cross-links.

Keywords: *rubber products, sulfur vulcanization, modeling.*

В производстве резиновых изделий стадия вулканизации является одним из наиболее ответственных и энергоемких процессов. Поэтому повышение эффективности процесса вулканизации, включая его оптимизацию и снижение брака готовых изделий, является одним из определяющих направлений технического прогресса в отрасли переработки эластомеров [1]. С практической точки зрения желательно проводить вулканизацию в возможно короткий срок, чтобы обеспечить высокую производительность соответствующего оборудования. В то же время для получения вулканизата с наилучшими свойствами необходимо создать условия для формирования в нем оптимальной вулканизационной структуры. Наиболее распространенной является серная вулканизация ненасыщенных каучуков, применяемая как для каучуков общего, так и специального назначения. Изучение кинетики вулканизации является основой при разработке механизма протекающих при вулканизации химических процессов образования действительного агента вулканизации (ДАВ), взаимодействия ДАВ с молекулами каучука, образования сшивок.

В настоящее время проводится множество исследований по разработке и моделированию режимов вулканизации как шин, так и резинотехнических изделий [2-7], в основе которых лежит создание компьютерной модели геометрии изделия и решение задачи теплопроводности численными методами (методом сеток). В результате этого решения происходит сокращение продолжительности вулканизации на 5-8%. Следует отметить, что несовершенство кинетических моделей, используемых для описания процесса вулканизации, может в существенной степени снизить достоверность предсказаний математической модели и точность рассчитанного режима вулканизации [8].

Целью настоящей работы явилось создание математической модели кинетики серной вулканизации резиновых изделий на основе ненасыщенных каучуков, позволяющей проводить оптимизацию и корректировку режима вулканизации изделий. В основу метода моделирования положен

подход, изложенный в работе [9], в соответствии с которым для описания кинетики вулканизации используется система дифференциальных уравнений химической кинетики, основанная на анализе схемы химических реакций, протекающих в процессе вулканизации, в отличие от традиционного метода, при котором кинетика вулканизации описывается одним эмпирическим уравнением. Отличие настоящей модели от ранее применявшейся состоит в использовании уточненной схемы реакций вулканизации, основанной на квантово-химическом анализе. В настоящей работе предложена следующая формальная кинетическая схема, обобщающая описанную выше совокупность реакций, протекающих в процессе вулканизации:

- 1) $U + A \xrightarrow{k_1} U^*$.
- 2) $S + U^* \xrightarrow{k_2} D + A$.
- 3) $D + R \xrightarrow{k_3} RD + U^*$.
- 4) $RD + RD \xrightarrow{k_4} RDR + U^*$.
- 5) $RD + RD \xrightarrow{k_5} RDR^*$.
- 6) $RDR^* \xrightarrow{k_6} R^*$.

Данная схема включает шесть стадий, каждая из которых является формальным обобщением нескольких реакций (гомогенных и гетерогенных), которые могут быть объединены в один совокупный процесс в соответствии с ролью данной стадии в общем процессе вулканизации.

На первой стадии, протекающей частично уже в процессе смешения и далее в процессе нагревания исходной дисперсии ингредиентов резиновой смеси в каучуке из ускорителя U и активатора A образуется комплекс U^* физически представляющий собой обратные мицеллы солей жирных кислот, в ядре которых расположены частично ионизированные молекулы оксида цинка и ускорителя. Протекание этого процесса характеризуется формальной константой скорости k_1 .

Вторая стадия объединяет реакции распада ускорителя на радикалы и взаимодействия их с серой, приводящие к образованию действительного агента вулканизации (ДАВ). Эта стадия формализуется в модели как взаимодействие серы (S) с комплексом U^* с образованием ДАВ (D) и регенерацией активатора (A). Хотя физически сера, вступающая в химическую реакцию с ускорителем, в зависимости от ее применяемой формы в конкретном рецепте резиновой смеси может быть или орторомбической серой или полимерной серой, в данной схеме она обозначена просто как продукт S , молекулярная масса и начальная концентрация которого определяются на стадии идентификации модели. То же самое относится и к продуктам U и A .

Третья стадия процесса представляет собой формализацию реакций, результатом которых является взаимодействие ДАВ с каучуком (R) с образованием персульфидрильных подвесок (RD). При распаде ДАВ образуются два радикала, различающихся по активности. Один из них взаимодействует с каучуком с образованием подвески RD , а другой, более активный, может принимать участие в реакциях со свободной серой и активатором в качестве ускорителя в форме комплекса U^* . Хотя химически этот ускоритель не эквивалентен исходному, в данной схеме между ними не делается формального различия, поскольку с точки зрения кинетики разница между ними не очень существенна.

Четвертая и пятая стадии, объединяют реакции, протекающие в период интенсивного сшивания, результатом которых является взаимодействие подвесок между собой с образованием поперечных связей. Образующиеся поперечные связи имеют разный тип: это могут быть полисульфидные связи, ди- и моносульфидные, а также углерод-углеродные связи. Полисульфидные связи в дальнейшем способны распадаться с образованием циклических сульфидов, связей меньшей сульфидности, и продуктов, способных взаимодействовать с серой с образованием ДАВ. Поэтому в предлагаемой схеме поперечные связи формально разделены на две группы: связи, не участвующие в последующих реакциях (RDR) и сшивки, способные к деструкции (RDR^*).

Распад сшивок, способных к деструкции, приводит к уменьшению степени сшивания, что проявляется в реверсии вулканизации и формализуется в предлагаемой схеме стадией 6, в ходе которой сшивки RDR^* распадаются с константой скорости в продукт деструкции R^* . Включение этой стадии в схему вулканизации позволяет описать не только процесс вулканизации, но и реверсию, что обычно не удается сделать в традиционных схемах моделирования вулканизации.

Поскольку предлагаемая схема формальна, за исключением исходных веществ, все реагенты представляют собой гипотетические продукты, концентрацию которых невозможно измерить экспериментально. Единственным способом идентификации модели является определение степени сшивания – величины, пропорциональной общей концентрации поперечных связей. Ее можно оценить по величине крутящего момента при изменении кинетики вулканизации на виброреометре.

В данной работе температурную зависимость констант скорости аппроксимировали уравнением Аррениуса. Таким образом, для каждой исследуемой резиновой смеси процесс вулканизации помимо концентраций исходных веществ (серы ускорителя и активатора) характеризуется тринадцатью параметрами: шестью предэкспонентами, шестью энергиями активации и коэффициентом момента, которые должны быть в определены в ходе процедуры идентификации.

Математическая модель кинетики вулканизации резиновой смеси, предложенная в настоящей работе, включает систему обыкновенных дифференциальных уравнений химической кинетики (1) – (9), соответствующую схеме реакций и выражения для зависимостей констант скорости реакций от температуры в форме уравнения Аррениуса (10).

$$\frac{dy_1}{d\tau} = -k_2 y_1 y_2, \quad (1)$$

$$\frac{dy_2}{d\tau} = -k_1 y_1 y_2 + k_2 y_3 y_4, \quad (2)$$

$$\frac{dy_3}{d\tau} = -k_2 y_3 y_4, \quad (3)$$

$$\frac{dy_4}{d\tau} = -k_2 y_3 y_4 + k_1 y_1 y_2 + k_3 y_5 + k_4 y_6^2, \quad (4)$$

$$\frac{dy_5}{d\tau} = -k_3 y_5 + k_2 y_3 y_4, \quad (5)$$

$$\frac{dy_6}{d\tau} = -(k_4 + k_5) y_6^2 + k_3 y_5, \quad (6)$$

$$\frac{dy_7}{d\tau} = k_4 y_6^2, \quad (7)$$

$$\frac{dy_8}{d\tau} = k_5 y_6^2 - k_6 y_8, \quad (8)$$

$$\frac{dy_9}{d\tau} = k_6 y_8, \quad (9)$$

$$k_i = k_{i0} \exp(-E_i / RT), \quad (10)$$

где τ – время; $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ – константы скоростей соответствующих реакций; y_1 – концентрация ускорителя (U); y_2 – концентрация активатора (A); y_3 – концентрация серы (S); y_4 – концентрация комплекса активатора и ускорителя (U^*); y_5 – концентрация ДАВ (D); y_6 – концентрация подвесок (RD); y_7 – концентрация сшивок, не склонных к деструкции (RDR); y_8 – концентрация сшивок, склонных к деструкции (RDR^*); y_9 – концентрация продуктов деструкции (R^*). В уравнении (5) учтено, что стадия 3 является реакцией псевдопервого порядка в силу того, что каучук находится в избытке; k_{i0} – предэкспоненты констант скорости; E_i – энергии активации; R – универсальная газовая постоянная, T – температура.

Уравнения кинетики численно решаются методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Для идентификации параметров математической моделью

наименьших квадратов были получены реометрические кривые вулканизации исследованных резиновых смесей при 5 температурах: 140, 150, 160, 170, 180 °С. Для решения задачи минимизации суммы квадратов отклонений расчетных и экспериментальных значений был предложен следующий алгоритм. Методом Монте-Карло в факторном пространстве генерируется тысяча точек, на основе которых создается выборка стартовых точек, в которых сумма квадратов отклонений экспериментальных и расчетных значений момента для кинетической кривой при каждой температуре является наименьшей. Затем методом сопряженных градиентов для каждой температуры положение минимума уточняется. В результате находится массив значений кинетических констант для всех температур. Далее методом наименьших квадратов вычисляются параметры уравнений (10): k_{i0} - предэкспоненты констант скорости реакций и E_i - энергии активации каждой реакции. При идентификации параметров математической модели в соответствии с описанной выше методикой необходимо на основании рецепта резиновой смеси вычислить начальные концентрации ингредиентов, участвующих в реакции вулканизации: серы, ускорителя и активатора.

В качестве примера на рис. 1 приведены экспериментальные точки, снятые с кинетической кривой вулканизации резиновой смеси (НК – 50; СКИ-3 – 50; сера полимерная – 2,3; сульфенамид Ц – 0,74, стеариновая кислота – 1,0) при 150 °С и рассчитанные кинетические кривые для трех различных приближений. Как видно, после окончания алгоритма оптимизации расчетная кинетическая кривая хорошо аппроксимирует экспериментальные данные.

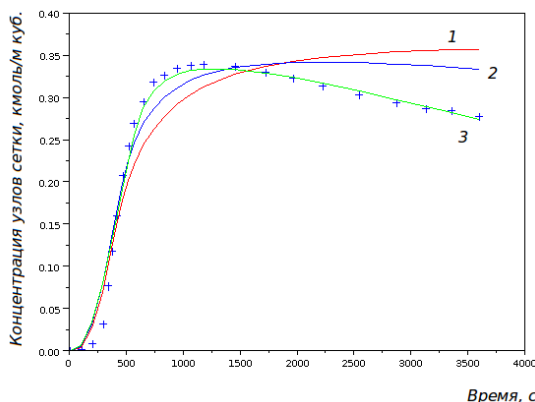


Рис. 1. Кинетика вулканизации резиновой смеси на основе 100 мас.ч. ПИ при 150 °С (точки) и расчетные зависимости:

1 - начальное приближение; 2 - первое приближение; 3 - уточнение.

Точки – эксперимент, кривые – расчет

В табл. 1 в качестве примера приведены рассчитанные кинетические константы вулканизации резиновой смеси при различных температурах.

Таблица 1. Кинетические константы вулканизации резиновой смеси на основе 100 мас.ч. ПИ (НК -50; СКИ-3 – 50; сера полимерная – 2,3; сульфенамид Ц – 0,74, стеариновая кислота – 1,0)

Параметр	Температура, °С				
	140	150	160	170	180
k_1	0,5079143	1,0233494	2,8245679	7,8032668	18,178471
k_2	8,2506556	15,514802	26,696422	27,760181	40,928569
k_3	0,3864608	0,2270382	0,190696	0,3167403	0,5806949
k_4	0,0048752	0,0154817	0,0216786	0,0312957	0,0382725
k_5	0,0063236	0,0203544	0,0215726	0,0373765	0,0574354
k_6	0,0000171	0,0002176	0,008986	0,0018029	0,0043127

Таким образом, в настоящей работе предложена кинетическая модель серной вулканизации резин на основе каучуков общего назначения, позволяющая прогнозировать процесс вулканизации при различных температурах. Данная модель может быть использована для корректировки и оптимизации режима вулканизации резиновых изделий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Совершенствование методов и средств адаптации режимов вулканизации / В.Г. Пороцкий, В.В. Савельев, В.К. Гордеев, Ю.З. Литвин-Седой // Вопросы практической технологии изготовления шин. 2000. № 3. С. 45–57.
2. *Коротких Н.И.* Моделирование вулканизации резинометаллических деталей для буровой техники / Н.И. Коротких, А.М. Воскресенский, В.Н. Красовский // Каучук и резина. 2003. № 2. С. 14–16.
3. *Киста А.* Optimalizacia vulkazacie viacvrstvovych gumovych vyrobkov / Anton Kukma, Ivan Janosik // Plasty u kouc. 1996. Vol. 33, №5. P. 132-135.
4. *Свердел М.И.* Программно-методическое обеспечение проектирования режимов вулканизации пневматических шин / М.И. Свердел, А.В. Зимин, Е.А. Дзюра // Каучук и резина. 2003. № 5. С. 17–22.
5. Моделирование формовой вулканизации типового резинообувного изделия / Л.С. Кушнарченко, А.М. Воскресенский, В.Н. Красовский // Каучук и резина. 2001. № 1. С. 46.
6. *Каблов В.Ф.* Моделирование вулканизации прямоугольной шашки шины на поверхности протектора для трехмерных тепловых потоков / В.Ф. Каблов, Н.И. Ивашкин, Ю.В. Земсков // Мат. методы в технике и технологии: тез. докл. XIX межд. науч. конф. Воронеж, 2006. Т. 9. С. 128–130.
7. *Седов Д.В.* О возможностях уточнения оптимума вулканизации автомобильных шин // Каучук и резина. 2000. №2. С.23.
8. *Агаянц, И.М.* Анализ воспроизводимости реометрических кривых процесса вулканизации / И.М. Агаянц, Ю.В. Кашкинова // Резиновая пром-сть. Сырье и материалы: Тез. докл. IX науч.-практ. конф. М.: ФГПУ «НИИШП», 2002. С. 28–29.
9. *Маркелов В.Г.* Моделирование процесса вулканизации толстостенных резиновых изделий / В.Г. Маркелов, М.Е. Соловьев // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2007. Т. 50, №4. С. 95–99.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ НАУКИ

УДК 378:621.3(075.8)(100)

Е. Г. Аккуратов

Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны
Ярославль, Россия, *email: ejen32@mail.ru*

ЭЛЕКТРОННЫЕ УЧЕБНИКИ И БАЗЫ ДАННЫХ ЗА РУБЕЖОМ: ПЕСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

На основе свободно доступных интернет-публикаций проводится анализ современного состояния и перспектив развития электронных учебников и баз данных за рубежом. На конкретных примерах показано, что создание электронных учебников и баз данных, несмотря на многолетнюю историю, находится на самой ранней стадии развития, а бюрократические попытки форсировать этот процесс приводят к дорогостоящим провалам. Необходима кропотливая и осмотрительная работа в режиме научно-практического эксперимента, чтобы электронные учебники и базы данных внесли достойный вклад в прогресс образования, просвещения и культуры.

Ключевые слова: электронные учебники, электронные базы данных.

E. G. Akkuratov

ELECTRONIC TEXTBOOKS AND DATABASE ABROAD: PERSPECTIVES OF USE

*Yaroslavl Higher Military School of the Air Defense
Russia, Yaroslavl, email: ejen32@mail.ru*

The current article presents a brief analysis of the modern state and perspectives of electronic textbooks and libraries abroad. The material is based on the open access foreign internet sources. Using particular examples it has been shown that despite a long history of electronic textbooks and libraries development, the latter remains at the very early stage. The bureaucratic attempts to speed up this process result in costly failures. It is necessary a painstaking and cautious work in the mode of scientific practical experiment to give electronic textbooks and libraries a chance to make worthy contribution into the progress of training, education and culture.*

Keywords: digital library, digital textbooks, e-library, e-textbooks, electronic library, electronic textbooks.

Настоящая статья представляет собой краткий обзор современного состояния и перспектив развития электронных учебников (ЭУ) (digital textbooks; electronic textbooks; e-textbooks) и электронных баз данных (ЭБ) (e-library; digital library) за рубежом. Обзор основан на свободных публикациях в интернете. Цель статьи – использовать зарубежный опыт в данной области, чтобы избежать повторения чужих ошибок, часто весьма неприятных.

В течение последнего десятилетия использование ЭУ в учебном процессе является предметом активного обсуждения, а его целесообразность, в общем, никем особенно не оспаривается. Многие страны разработали в этом направлении специальные программы. Например, Южной Кореей в 2011 г. принята государственная программа внедрения ЭУ, согласно которой к 2015 г. все учащиеся, начиная с первого класса, должны были перейти на ЭУ [1]. Пять лет минуло, однако за это время в образовательной сфере никакой «электронной» революции в Корее так и не произошло. В одном из блогов, где обсуждался вопрос, сами корейцы пишут, что понадобятся еще многие годы, чтобы дигитализация системы образования обрела какие-то реальные черты [2].

Углубленный анализ проблемы показывает, что основной причиной провала реформы явился чрезмерно упрощенный подход к решению поставленных задач. Неверными оказались два принципиальных положения. Во-первых, что за счет перехода на ЭУ будет получена большая экономия средств и, во-вторых, то, что новое поколение учащихся, рожденное уже в компьютерную эпоху (так называемое поколение Y (Generation Y; Gen Y), «на ура» воспримет предлагаемые новшества. Уже в ходе реализации проектов перехода на ЭУ исполнители столкнулись с неожиданными и серьезными трудностями. Выяснилось, что создание ЭУ – это не просто оцифровка печатного. Принципы построения печатного и ЭУ существенно различны.

В настоящее время не существует оптимального электронного устройства-носителя ЭУ. Оба альтернативных друг другу технологических подхода, а именно 1:1 (one-to-one (каждому по одному), каждому учащемуся учебное заведение выдает персональный носитель ЭУ) и BOYD (bring your own device (принести собственное устройство), каждый учащийся загружает ЭУ в свое собственное устройство), при массовом использовании осуществить не так просто и дешево. Поколение Y, упоминавшееся выше, с современными информационными технологиями на «ты» только в сфере общения и развлечения, и совершенно не готово к их использованию для систематического приобретения серьезных знаний. Только 12,8% студентов американских вузов предпочитают ЭУ печатному [3, table 4, p.177]. Как это ни покажется странным, еще большие трудности

с использованием ЭУ у преподавателей. Комплексный анализ данного сектора проблем на примере профессорско-преподавательского состава американских университетов приводятся в докторской диссертации (PhD) Сируи Ванг [4]. Иногда непреодолимые препятствия создаются копирайтным правом. И это только некоторые проблемы, связанные с осуществлением проекта ЭУ.

В настоящее время ведутся интенсивные исследования в попытке придать новый импульс развития ЭУ. В связи с этим отметим работы двух исследовательских групп. Первая из них – это коллектив японских специалистов, предлагающих симбиоз интернета и свободно доступного единого электронного учебника в виде обучающей платформы под замысловатым названием «Творческий подход к высшему образованию с объектами изучения» (creative higher education with learning objects (CHiLO)) в формате EPUB3 [5, 6]. Вторая группа – это множество разработчиков в КНР, занятых в государственной программе дигитализации образования «Электронный портфель» (E-schoolbag). Особенностью данного проекта является не только объединение электронного учебника с интернет-ресурсами, но и обеспечение простого доступа к ассоциированным с обучением службам, например, библиотечной системе или принтинга в единой укладке [7].

Новые средства обучения меняют его методы, способствуют появлению новых педагогических подходов, краткую характеристику которых можно найти в статье австралийского исследователя Лизы Чессер (Lisa Chesser) «Новые веяния в образовании: 50 различных подходов к обучению» [8]. Одной из таких новых тенденций в организации образования является смещение дизайна образовательного процесса с традиционной ригидной структуры класса, ориентированной на выполнение единого учебного задания под руководством учителя (в англоязычной литературе этот подход часто обозначается фразой one-size-fits-all learning), к персонализированному обучению (Personalized learning) [9]. Представление о таком подходе дает материал американского специалиста в области теории и практики образования Роберта Вейссера (Robert Weisser) [10].

Электронные базы данных – организованное собрание текстов, видео- и аудиоматериалов в электронном (оцифрованном виде) в совокупности со средствами упорядочения, хранения и извлечения этой информации [11-13]. В настоящее время все библиотеки, исследовательские и учебные учреждения имеют свои собственные ЭБ, практически все они закрыты для посторонних. В качестве исключительного примера открытой ЭБ можно привести ЭБ Национальной медицинской библиотеки США (U.S. National Library of Medicine, Батезда, штат Мэриленд). Эта библиотека незаменима для работы с журналами с помощью собственного поисковика Pubmed [14, 15]. Однако выложенные в свободном доступе книги – уста-

ревшие, изданные 5-10 и более лет назад. Это устроит читателя, только если предметом его интереса являются детали истории вопроса.

Представление о типичной ЭБ крупного университета можно составить на примере ЭБ Калифорнийского университета в Дейвисе [16, 17]. Библиотека включает около одной тысячи различных баз данных, подразделяемых по виду информации (книги, отдельные статьи, журналы, имиджинговые файлы и т.д.) и по основным разделам наук (биологические и сельскохозяйственные науки, правительственная информация, медицинские науки, гуманитарные дисциплины и т.д.). Внутри медицинских наук информация подразделяется на 158 баз данных. Поиск возможен по заглавию, автору, ключевому слову, как простой поиск, так и сложный с использованием булевых операторов. Доступ к электронным источникам возможен также прямо по их названиям, при этом книги сгруппированы по медицинским дисциплинам. Скажем, в разделе «Информатика» выложено 6 книг. Откроем, к примеру, шестую из них «Информатика общественного здоровья и информационные системы». В книге 32 главы, открытый доступ только к оглавлению. К остальному материалу доступ платный или через подписку библиотеки (для студентов и преподавателей данного университета).

В плане рассматриваемой темы интересна инициатива Министерства обороны США, предпринятая в 2015 г. в целях стимулирования электронного чтения. Отдельные виды вооруженных сил участвуют в данном проекте по разным направлениям. ВМФ и ВВС взяли курс на создание на подводных лодках, авианосцах, авиабазах за рубежом и других автономно действующих объектах, полноценных электронных библиотек служебной и художественной литературы. Основную роль в развитии этого направления взял на себя Объединенный комитет начальников штабов вооруженных сил США. Опираясь на рекомендации ведущих образовательных и научно-исследовательских заведений ВМФ, таких как Военно-морская академия (Naval Academy), Военный колледж ВМФ (Naval War College), Военно-морское училище постдипломного образования (Naval Postgraduate School) и др., объединенный комитет издает оперативный бюллетень с рекомендательным списком изданий, в т.ч. и только что вышедших, по отдельным темам, например, «Познавай мир» (See The World) или «Отдых и снятие стресса» (Relaxation&Stress Management). Рекомендуемые книги сразу транслируются в войсковые библиотеки и доступны бесплатно [18].

Армия США идет другим путем [19], совершенствуя свою ЭБ служебной литературы. В 2015 г. она начала перевод служебных документов, включая уставы и руководства, в формат EPUB (ранее эти документы были в формате PDF), чтобы военнослужащие могли читать эти материалы на смартфонах и планшетах (Tablet computers). Ожидается, что переход на

новый формат повысит познавательную активность личного состава, т.к. позволит не только читать на мониторах малых размеров, но и делать заметки в тексте, а также использовать аудио- и видеоматериалы. Известно, что в Армии США ведутся серьезные исследования в области психологии электронного чтения. В частности, установлено, что целенаправленное чтение, особенно документов, не выигрывает от дополнения текста всякого рода боксами и мультимедийными включениями, которые воспринимаются как досадное отвлечение от процесса усвоения материала.

Из вышеизложенного следует, что создание ЭУ и ЭБ, несмотря на многолетнюю историю, находится еще на ранней стадии, а бюрократические попытки форсировать этот процесс обречены на дорогостоящие провалы. Требуется кропотливая и осмотрительная работа в режиме научно-практического эксперимента, чтобы ЭУ и ЭБ внесли свой достойный вклад в прогресс образования, просвещения и культуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Haq H.* In South Korea, all textbooks will be e-books by 2015 [Электронный ресурс] // The Christian Science Monitor. 6 July 2011. Режим доступа: <http://www.csmonitor.com/Books/chapter-and-verse/2011/0706/In-South-Korea-all-textbooks-will-be-e-books-by-2015>(дата обращения 12.08.2017).
2. *Has South.* Korea replaced all its K12 paper textbooks with tablets and digital content? [Электронный ресурс] / Quora. Режим доступа: <https://www.quora.com/Has-South-Korea-replaced-all-its-K12-paper-textbooks-with-tablets-and-digital-content>(дата обращения 12.08.2017).
3. *Millar M.* Digital or Printed Textbooks: Which do Students Prefer and Why? / Мю Millar, N. Schrier [Электронный ресурс] // J. Theaching Travel Tourism. 2015. Vol. 15, N2. P. 166-185. Режим доступа: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/15313220.2015.1026474>(дата обращения 12.08.2017).
4. *Wang S.* Perceived attributes and factors influencing instructors' using e-textbooks in higher education [Электронный ресурс] / University of Southern Mississippi. Hattiesburg, Mississippi, USA. May 2015. 148 p. Режим доступа: <http://aquila.usm.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1011&context=dissertations>(дата обращения 12.08.2017).
5. Fusion of E-Textbooks, Learning Management Systems, and Social Networking Sites: A Mash-Up Development [Электронный ресурс] / Hori M. et al. // Advances in Intelligent Systems and Computing / 9th International Conference on Genetic and Evolutionary Computing, ICGEC 2015. Yangon, Myanmar. 26-28 August 2015. 2016. Vol. 338. ISBN 9783319232065. P. 377-338. Режим доступа: <http://www.cccties.org/wp/wp-content/uploads/2015/10/icgrec2015.pdf> (дата обращения 12.08.2017).
6. *Hori M.* Learner Autonomy through the Adoption of Open Educational Resources Using Social Network Services and Multimedia E-textbooks [Электронный ресурс]

- // AAOU J. 2015. Vol. 10, N 1. P. 23-35. Режим доступа: <http://aaou.ouhk.edu.hk/files/journal/Vol10%281%29June2015.pdf>(дата обращения 12.08.2017).
7. Hoel T. E-Schoolbag in China – exploring research evidence for large scale deployment of e-Textbooks and services [Электронный ресурс] // 2015 IEEE 15th International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT). 6-9 July 2015. Hualien, Taiwan. 6 p. Режим доступа: http://www.hoel.nu/publications/Noel_ICALT_2015_submitted.pdf (дата обращения 12.08.2017).
 8. Chesser L. Modern Trends In Education: 50 Different Approaches To Learning [Электронный ресурс] // Teachthought. December 1, 2013. Режим доступа: <http://www.teachthought.com/pedagogy/modern-trends-education-50-different-approaches-learning> (дата обращения 12.08.2017).
 9. Аккуратов Е.Г. Электронные учебники за рубежом / Е.Г. Аккуратов, А.А. Чернолихов // XII Междунар. конф. «EUROPEAN RESEARCH», г. Пенза, 7 октября 2017 г.: тр. конф. Пенза: Изд-во МЦНС «Наука и просвещение», 2017. С. 231-233
 10. Weisser R. Trends in Instructional Desing [Электронный ресурс] // A Pass Educational Group / A Pass Education Blog. March 3, 2016. Режим доступа: <http://www.apass.education.com/blog/trends-in-instructional-desing>(дата обращения 12.08.2017).
 11. Аккуратов Е.Г. Работа с медицинскими электронными базами данных. Ч.1. М., 2006. 22 с. Деп. в ВИНТИ 04.12.2006, № 1503-B2006.
 12. Digital library [Электронный ресурс] // Wikipedia. Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/Digital_library.
 13. Pubmed. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed> (дата обращения 12.08.2017).
 14. Лищук Т.А. Электронная медицинская библиотека как составная часть корпоративной библиотечной системы г. Ярославля: опыт создания, пути и перспективы развития / Т.А. Лищук, Е.Г. Аккуратов // 8-я Междунар. конф. "Крым 2001". Библиотеки и ассоциации в меняющемся мире: новые технологии и новые формы сотрудничества, г. Судак, 9-17 июня, 2001 г.: тр. конф. М.: Изд-во ГПНТБ России. 2001. С. 790-793.
 15. Аккуратов Е.Г. Работа с медицинскими электронными базами данных. Ч.2. М., 2006. 24 с. Деп. в ВИНТИ 04.12.2006, № 1504-B2006.
 16. Electronic Textbooks / US Davis Health Sciences Libraries [Электронный ресурс] // US Davis University Library. Режим доступа: <http://guides.lib.ucdavis.edu/e-textbooks>(дата обращения 12.08.2017)
 17. Аккуратов Е.Г. Информационно-поисковая система Paperchase. М., 2006. 24 с. Деп. в ВИНТИ 04.12.2006, № 1502-B2006.
 18. Kozlowsky M. How the US Military Promotes Digital Reading [Электронный ресурс] // Good E Reader. 13 June 2015. Режим доступа: <http://goodereader.com/blog/e-book-news/how-the-us-military-promotes-digital-reading>(дата обращения 12.08.2017).
 19. Hoffelder N. The US Army is Adopting Epub [Электронный ресурс] // The digital-reader. 16 June, 2015. Режим доступа: <http://The-digital-reader.com/2015/06/16/the-us-army-is-adopting-epub> (дата обращения 12.08.2017).

УДК 519.72

Д. А. Дудин, А. В. Никитенко

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: *enragesoft@gmail.com; andnkt@mail.ru*

О ВАРИАНТЕ АУТЕНТИФИКАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕКТРОННОЙ ЦИФРОВОЙ ПОДПИСИ НА БАЗЕ АЛГОРИТМА RSA

Рассмотрена модель, состоящая из трех участников, в которой сервер производит аутентификацию клиента, используя ЭЦП на базе алгоритма RSA. Также обеспечена её техническая реализация.

Ключевые слова: ЭЦП на базе алгоритма RSA, аутентификация с использованием ЭЦП, реализация электронной цифровой подписи.

D. A. Dudin, A. V. Nikitenko

*Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: *enragesoft@gmail.com; andnkt@mail.ru**

AUTHENTICATION USING DIGITAL SIGNATURE BASED ON RSA ALGORITHM

We consider the model with three participants in which server authenticates a client, using digital signature based on RSA algorithm. Also, technical implementation is provided.

Keywords: digital signature based on RSA algorithm, authentication using digital signature, digital signature implementation.

С развитием информационных технологий электронного документооборота все более актуальной становится задача проверки сервером подлинности идентификатора клиента. Одним из перспективных, набирающих популярность идентификаторов является электронная цифровая подпись (ЭЦП). В статье описывается модель аутентификации с использованием ЭЦП, генерация которой производится на базе алгоритма RSA. В схеме модели присутствуют три участника: Клиент, Сервер и Противник. Клиент генерирует ключи и передает открытый ключ на сервер. Сервер осуществляет получение сообщений и проверку подписи. Противник, в свою очередь, пытается подделать подпись, и, владея или не владея оригиналом сообщения, осуществить атаку на сервер. Причем модель реализуется в

асинхронном интерфейсе, что позволяет реализовать одновременные запросы на сервер. Клиент владеет закрытым ключом и с помощью выбранной хеш-функции (в модели используется SHA-256) может корректно формировать цифровую подпись и отправлять её серверу для обработки. В случае запроса от клиента сервер имеет возможность дешифровать цифровую подпись с помощью открытого ключа и сравнить хеш-образ сообщения с полученным при дешифровании хеш-образом подписи. Противник же, в свою очередь, к серверу получить доступ не может.

Далее опишем всю схему подробнее. Для генерации ключей выбираются два числа p и q размерности 2048 бит. Затем с помощью описанного на битовых операторах теста Миллера–Рабина выполняется проверка этих чисел на простоту. Каждая проверка выполняется в отдельной задаче. Если по выполнению проверки число p или q не является простым, происходит выброс исключения. Далее происходит расчет значений ключей. Для этого вычисляется функция Эйлера от чисел p и q : $\phi(p, q) = (p-1) \cdot (q-1)$. Если значение функции Эйлера – взаимно простое с произвольно выбираемой открытой экспонентой e , тогда вычисляется мультипликативная инверсия d к уравнению вида $d \cdot e \equiv 1 \pmod{\phi(p, q)}$.

В предлагаемой модели расчет мультипликативной инверсии производится с помощью расширенного алгоритма Евклида. Проверка чисел на взаимную простоту осуществляется с помощью бинарного алгоритма Штейна вычисления наибольшего общего делителя $\gcd(a, b)$. При этом используются следующие тождества:

1) если одно или оба из чисел являются нулем, то возвращается ноль, так как любое число является делителем нуля:

$$\gcd(a, 0) = \gcd(0, b) = 0;$$

2) если a и b четные, тогда

$$\gcd(a, b) = 2 \gcd\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right);$$

3) если a четно, а b нет, тогда

$$\gcd(a, b) = \gcd\left(\frac{a}{2}, b\right);$$

4) если a нечетно, а b четно, тогда

$$\gcd(a, b) = \gcd\left(a, \frac{b}{2}\right).$$

Если значение открытой экспоненты e не взаимно простое со значением функцией Эйлера, то в модели происходит генерация исключения.

Реализация алгоритма SHA-256 предназначена под архитектуру с порядком байт Little Endian, причем входные данные преобразуются в кодировку UTF-8. Результаты обработки данных хеш-функцией SHA-256 представлены на рис. 1 и 2.

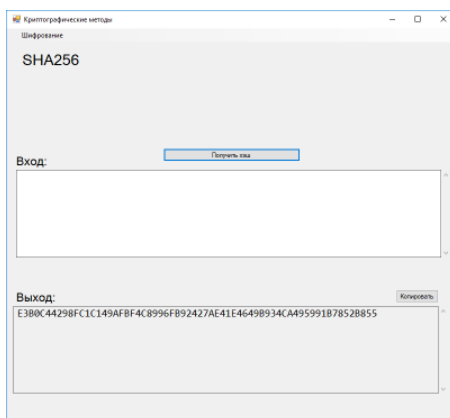


Рис. 1. Получение хеш-суммы для пустой строки с помощью SHA-256

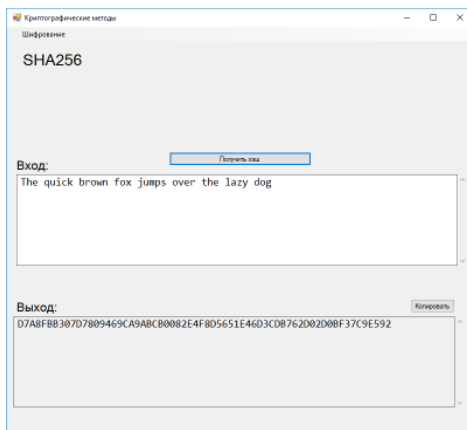


Рис. 2. Получение хеш-суммы сообщения с помощью SHA-256

Работа участников модели (Клиент, Сервер, Противник) в модели реализуется следующим образом. Клиент обеспечивает генерацию ключей,

передачу открытого ключа серверу и формирование цифровой подписи. В частности, для генерации цифровой подписи вычисляется хеш-функция от исходного сообщения T : $h = h(T)$. Однако при получении хеш-образа его значение может быть отрицательным. В этом случае используется его корректировка: h заменяется на $2^{256} + h$. Она позволяет получить корректное положительное значение хеш-образа. В дальнейшем, при дешифровании на сервере, в шестнадцатеричной форме данное значение будет иметь дополнительный начальный ноль, который при сравнении хеш-образов отбрасывается. Величина показателя степени определяется выходом хеш-функции. Далее в отдельной задаче генерируется ЭЦП, используя

$$s = h^d \pmod{n},$$

где h – полученный хеш-образ, пара $\{d, n\}$ – значения закрытого ключа. После выполнения данных операций, метод возвращает структуру, хранящую исходное сообщение T и цифровую подпись s . Сервер выполняет принятие этой структуры и проверку ЭЦП. Также сервер на этапе инициализации принимает от клиента открытый ключ. Для проверки ЭЦП в отдельной задаче происходит дешифрование этой подписи и ее перевод в шестнадцатеричную систему по формуле

$$h = \left[s^e \pmod{n} \right]_{16}.$$

Если для цифровой подписи выполнялась корректировка, начальный ноль отбрасывается. Далее, получим хеш-образ принятого сообщения: $h' = h(T')$. Если выполняется условие $h' = h$, то сервер возвращает значение – истина (аутентификация успешна), иначе – ложь (аутентификация не состоялась).

Для возведения в степень по модулю применяется следующий алгоритм. Рассмотрим уравнение вида $c \equiv b^e \pmod{m}$. Представим показатель e в двоичном виде:

$$e = \sum_{k=0}^{n-1} a_k 2^k.$$

В подобной форме длина e составляет n бит, a_k принимает значения 0 и 1, старший бит a_{n-1} всегда равен 1. Подставим e в исходное уравнение

$$b^e = b^{\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k 2^k \right)} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(b^{2^k} \right)^{a_k}.$$

Решение принимает вид

$$c = \prod_{k=0}^{n-1} (b^{2^k})^{a_k} \pmod{m}.$$

Кроме того, в модели описаны возможные действия злоумышленника (Противник). Противник выполняет атаки на сервер посредством фальсификации ЭЦП и отправки её на сервер. В данной модели возможны два варианта атак: Противник не обладает сообщением; Противник обладает сообщением. В каждом из вариантов происходит генерация случайного числа k , такого что $k \in [0, 2^{2048}]$. Далее фальсифицированная ЭЦП отправляется на сервер. Полная техническая реализация данной модели доступна в репозитории: <https://github.com/Softenraged/RSADigitalSignature>

Для апробации работы данной модели применялось компьютерное оборудование со следующими техническими характеристиками: процессор IntelCore i5 – 3450, 3.10 GHz, разрядность процессора – x64, ОЗУ – 12 GB. При этом время на генерацию ключей, включая проверку на простоту, составило 2,29 с, время полного цикла генерации цифровой подписи и её проверки на сервере – 3,31 с, время полного цикла подделывания цифровой подписи и её проверки на сервере – 0,85 с.

Пример работы описанной модели представлен на рис. 3.

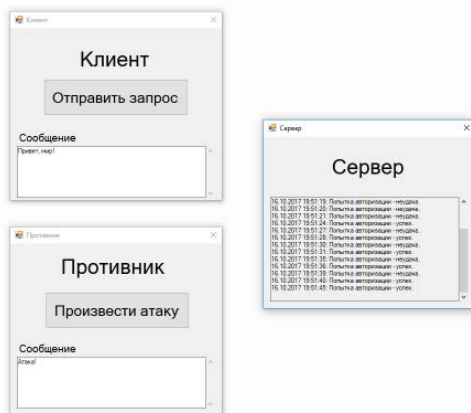


Рис. 3. Пример работы модели

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *FIPS 180-4. Secure Hash Standards (SHS)*. NIST, 2015. 36 с.
2. *Introduction to Algorithms* / Thomas H. Cormen [et al.]. 3rd ed. London: The MIT Press, 2009. 1313 p.

УДК 379.85

О. В. Карташева

Ярославский филиал Финансового университета
при Правительстве Российской Федерации
Россия, г. Ярославль, *e-mail*: *ovkartasheva@fa.ru*

**РЕСУРСЫ ИНТЕРНЕТА НА ЗАНЯТИЯХ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ИТ-ИНФРАСТРУКТУРА ПРЕДПРИЯТИЯ»
ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ «БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКА»**

Применение ресурсов интернета на практических занятиях по дисциплине «ИТ-инфраструктура предприятия» позволяет организовать полноценное изучение инструментальных средств аудита ИТ-инфраструктуры.

Ключевые слова: *ИТ-инфраструктура, аудит ИТ-инфраструктуры, жизненный цикл ИТ-инфраструктуры.*

O. V. Kartasheva

Yaroslavl branch of Financial University under Government
of the Russian Federation
Russia, Yaroslavl, *e-mail*: *ovkartasheva@fa.ru*

**INTERNET RESOURCES ON CLASSES OF COURSE
"IT INFRASTRUCTURE OF FIRM" FOR THE BUSINESS
INFORMATICS PROGRAM**

Application of Internet resources on classes of course "The IT infrastructure of firm" allows to realize a study of software for IT infrastructure audit.

Keywords: *IT infrastructure, audit of IT infrastructure, life cycle of IT infrastructure.*

Дисциплина «ИТ-инфраструктура предприятия» представлена в учебном плане Ярославского филиала Финуниверситета в базовой части профессионального цикла направления 38.03.05 «Бизнес-информатика».

Целью дисциплины «ИТ-инфраструктура предприятия» является овладение студентами общими принципами, концепциями и методами в сфере управления ИТ-инфраструктурой предприятия для обеспечения сбалансированного развития и эффективного применения информационных систем и технологий и выработки технологических решений, позволяющих

щих достичь высокой производительности труда в организации [2]. Дисциплина ориентирована на формирование у студентов базовых понятий, связей и закономерностей в области управления ресурсами организации и ее ИТ-инфраструктурой.

В процессе изучения дисциплины студенты должны освоить следующие темы:

1. ИТ-инфраструктура предприятия: системный взгляд.
2. Управление аппаратными ресурсами.
3. Управление программными ресурсами.
4. Управление телекоммуникациями и сетями.
5. Управление ИТ-инфраструктурой.
6. Аудит ИТ-инфраструктуры.

Изучение темы «Аудит ИТ-инфраструктуры» подразумевает, в том числе и знакомство с основными методами исследования, применяемыми при ИТ-аудите, такими как:

1. Анкетирование сотрудников организации,
2. Инвентаризация компонентов ИТ-инфраструктуры,
3. Анализ файлов и системных событий,
4. Анализ программного обеспечения,
5. Анализ рабочих станций в составе ИТ-инфраструктуры,
6. Мониторинг и диагностика активного сетевого оборудования
7. Мониторинг и диагностика пассивных компонентов ИТ-инфраструктуры.

Для проверки теоретических и практических знаний студенты на практических занятиях решают ситуационные задачи по управлению ИТ-инфраструктурой. Ряд вопросов выносятся на самостоятельную работу. Одним из видов самостоятельной работы студентов-бакалавров является подготовка доклада [5]. С тематикой докладов студенты знакомятся на первой лекции. Нужно отметить, что использования только учебной литературы при изучении лучших мировых и отечественных практик управления ИТ-инфраструктурой явно недостаточно, целесообразно использовать соответствующее программное обеспечение [3].

При проведении практических занятий по дисциплине «ИТ-инфраструктура предприятия» возникает одна важная проблема: полноценное изучение инструментальных программных средств аудита ИТ-инфраструктуры в учебном классе на студенческих рабочих местах требует входа в систему с правами администратора. Только при этом условии будут доступны функции администрирования и настройки инструментального программного средства. С другой стороны, после занятий необходимо обязательно вернуть систему к начальным настройкам (для проведения занятий по другим дисциплинам), а это достаточно трудозатратный процесс.

При работе на реальной системе некоторые действия студентов могут привести систему в нерабочее состояние и повлечь за собой срыв учебного процесса в дальнейшем, что тоже недопустимо. Выходом может стать использование на практических занятиях ресурсов интернета (облачных сервисов, on-line версий программных продуктов и т.п.) [6]. В качестве примера можно назвать следующие ресурсы:

- <http://inventdemo.url.ph/> – Система учета ИТ-активов позволяет вести учет аппаратных, программных ресурсов, учет телекоммуникаций и сетей. В качестве результатной информации можно сформировать Ведомость по всей технике и ПО, Ведомость по сотруднику, Ведомость по офису, Отчет об использованных лицензиях, Ведомость по инфраструктуре (отчет по сетевому оборудованию и IP-адресам);

- <http://www.webnice.biz/online-scif/> – Бесплатная облачная комплексная информационная система для организации складского и финансового учета, ведения клиентской базы, учета расходов, производства, обработки заказов из интернет-магазина.

Отражением трансформации роли и места ИТ-службы в структуре предприятий является концепция и модель управления качеством информационных услуг (Information Technology Service Management – ITSM, управление ИТ-услугами). По проекту ITIL (IT Infrastructure Library) была разработана библиотека, описывающая лучшие из применяемых на практике способов организации работы подразделений или компаний, занимающихся предоставлением услуг в области информационных технологий [4]. Существует большое количество инструментальных программных средств, разработанных компаниями- производителями программного обеспечения управления инфраструктурой ИТ, и реализующих модели процессов в соответствии с ITIL/ITSM. Примерами ресурсов интернета, посвященных этой проблематике, могут служить:

- http://www.inframanager.ru/Watch/download_demo/ – ITSM система Инфра Менеджер предназначена для комплексной автоматизации ИТ-деятельности и постановки ИТ-процессов в соответствии с мировой методологией ITIL/ITSM. Инфра Менеджер ИТ-активы предназначен для учета ИТ-имущества и управления ИТ-инфраструктурой на предприятии.

- http://www.itexpert.ru/rus/certification/itil_v3_test/1/start.html – Симулятор экзамена ITIL Foundation (пробный On-line экзамен по основам ITIL).

Использование этих ресурсов интернета на практических занятиях по дисциплине «ИТ-инфраструктура предприятия» позволяет реализовать межпредметные связи с дисциплинами «Архитектура предприятия»,

«Управление жизненным циклом ИС», «Стандартизация, сертификация и управление качеством программного обеспечения», «Деловые ресурсы Интернета», а также способствует формированию следующих компетенций [1]:

- способность работать с компьютером как средством управления информацией, работать с информацией из различных источников, в том числе в глобальных компьютерных сетях (ОПК-3);
- проведение обследования деятельности и ИТ-инфраструктуры предприятий (ПК-5);
- использование современных стандартов и методик, разработка регламентов для организации управления процессами жизненного цикла ИТ-инфраструктуры предприятий (ПК-7);
- организация взаимодействия с клиентами и партнерами в процессе решения задач управления жизненным циклом ИТ-инфраструктуры предприятия (ПК-8);
- организация взаимодействия с клиентами и партнерами в процессе решения задач управления информационной безопасностью ИТ-инфраструктуры предприятия (ПК-9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приказ от 11 августа 2016 г. № 1002 Об утверждении Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика (уровень бакалавриата).
2. *Алтухова Н.Ф.* «ИТ-инфраструктура предприятия»: Рабочая программа дисциплины предназначена для студентов, обучающихся по направлению 38.03.05 «Бизнес-информатика» (программа подготовки бакалавров). М.: Финансовый ун-т, кафедра «Бизнес-информатика», 2016.16 с.
3. *Вейцман В.М.* Проектирование информационных систем: учебное пособие. Ярославль: Образовательная организация высшего образования (частное учреждение) «Международная академия бизнеса и новых технологий (МУБиНТ)», 2017. 274 с.
4. *Долженко А.И.* Управление информационными системами: курс лекций. М.: ИНТУИТ, 2007. 191 с.
5. *Иванова Н.И.* О некоторых аспектах внеаудиторной работы со студентами /Н.И. Иванова // Наука и образование: тенденции и перспективы Материалы Международ. науч.-практ. конф. Уфа: Автономная некоммерческая организация «Исследовательский центр информационно-правовых технологий». 2014. С. 164-168.
6. *Карташева О.В.* Управление информационными ресурсами : учеб. пособие Ярославль : Академия МУБиНТ, 2012. 92 с.

УДК 631.171.006.9:621.311.21(470.317)

Е. С. Леженина, А. С. Ермишин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ermishinas@ystu.ru

ВНЕДРЕНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МЕТРОЛОГИЧЕСКИМ ОБЕСПЕЧЕНИЕМ НА КОСТРОМСКОЙ ГРЭС

В статье рассматриваются вопросы автоматизации управления метрологическим обеспечением на Костромской ГРЭС. Приводится пример построения такой автоматизированной системы, описывается полезный эффект от внедрения автоматизации метрологического обеспечения на объектах гидроэнергетики.

Ключевые слова: Костромская ГРЭС, метрологическое обеспечение, автоматизация, процессный подход, средства измерений.

E. S. Lezhenina, A. S. Ermishin

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: ermishinas@ystu.ru

THE INTRODUCTION OF THE AUTOMATED MANAGEMENT SYSTEM OF METROLOGICAL MAINTENANCE AT KOSTROMA STATE DISTRICT POWER STATION

The paper considers the questions of automation of management of metrological maintenance at Kostroma state district power station. We give an example of building such an automated system and describe the efficiency of automation of metrological maintenance at the hydropower facilities.

Keywords: Kostroma state district power station, metrological maintenance, automation, process approach, measuring instruments.

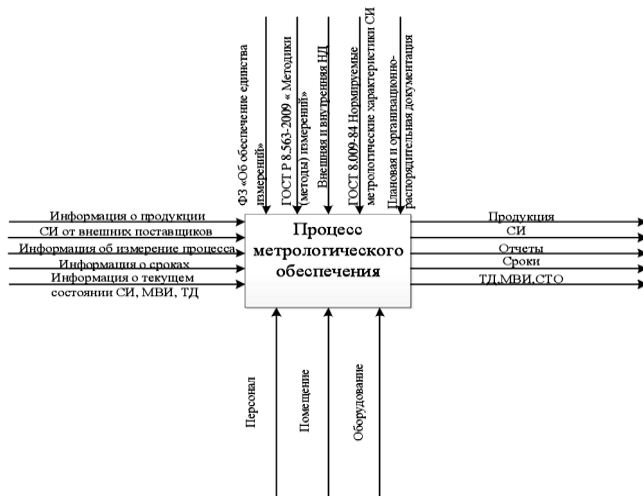
Костромская ГРЭС – одна из самых крупных и технически совершенных тепловых электростанций Центрального федерального округа России, имеющая рекордные показатели по экономии условного топлива среди предприятий своего класса. Она занимает третье место по установленной мощности (3600 МВт) и вырабатывает около 3 % от общего объёма производимой в России электроэнергии. История Костромской ГРЭС отсчитывается от даты пуска первого энергоблока 300 МВт – 1969 года. С 1 октября 2012 года Костромская ГРЭС является филиалом ОАО «ИНТЕР РАО – Электрогенерация».

Метрологическое обеспечение рассматривается как элемент системы менеджмента качества, поэтому на него распространяется принятый в настоящее время процессный подход к организации работ по обеспечению качества и управлению качеством [1]. Суть процессного подхода состоит в том, что любая деятельность рассматривается как процесс переработки входного потока ресурсов (документов, материалов, идей, изделий, финансов, времени) в требуемый результат (документы, материалы, идеи, изделия, финансы, время).

Был проведен анализ процессов на Костромской ГРЭС с помощью построения контекстной диаграммы процесса метрологического обеспечения и его декомпозиция с применением графической нотации IDEF0. Процесс метрологического обеспечения производства включает в себя:

- 1) планирование метрологического обеспечения производства;
- 2) метрологическую экспертизу технической документации (ТД) и аттестацию методик выполнения измерений (МВИ);
- 3) управление оборудованием для мониторинга и измерений;
- 4) метрологический надзор;
- 5) анализ процесса.

Контекстная диаграмма процесса метрологического обеспечения производства, смоделированная в среде Business Studio, приведена на рис. 1.



ЦЕЛЬ: является обеспечение единства измерений, исследований, разработки, испытаний, контроля и эксплуатации продукции.

Рис 1. Контекстная диаграмма процесса метрологического обеспечения производства

Средствами Business Studio выполнена декомпозиция процесса метрологического обеспечения производства на Костромской ГРЭС, представленная на рис. 2.

1. Планирование метрологического обеспечения производства, целью которого является снижение брака, повышение производительности и эффективности работы.

Результатами этого подпроцесса являются:

- готовый план метрологического обеспечения производства;
- смета;
- договор о поверке средств измерений (СИ) со сторонними организациями;
- план калибровки СИ;
- план разработки МВИ.

2. Метрологическая экспертиза ТД и аттестация МВИ, целью которых является анализ ТД, а также актуализация старых МВИ и аттестация новых.

Результатами процесса аттестации МВИ является аттестованные МВИ, ТД, стандарты организации (СТО).

3. Управление оборудованием для мониторинга и измерений.

Целью данного бизнес-процесса является метрологическое обеспечение единства, требуемой точности, достоверности, повторяемости результатов измерения для снижения брака выпускаемой продукции.

Результатами процесса управления СИ является:

- СИ, прошедшие поверку;
- СИ, прошедшие калибровку;
- списанные СИ;
- отчет.

4. Метрологический надзор.

Целью метрологического надзора является определение соответствия требованиям государственных стандартов РФ и стандартам предприятия.

Ответственным за процесс метрологического надзора является инспектор по обеспечению единства измерения.

5. Анализ результатов процесса, целью которого является сопоставление полученной продукции с фактическими планами, анализ СИ и МВИ.

Целью анализа результатов процесса является сопоставление полученной продукции с фактическими планами, анализ СИ и МВИ.

Результатом анализа результатов процесса является получение вывода об удовлетворенности результатами измерений, испытаний и контроля.

342

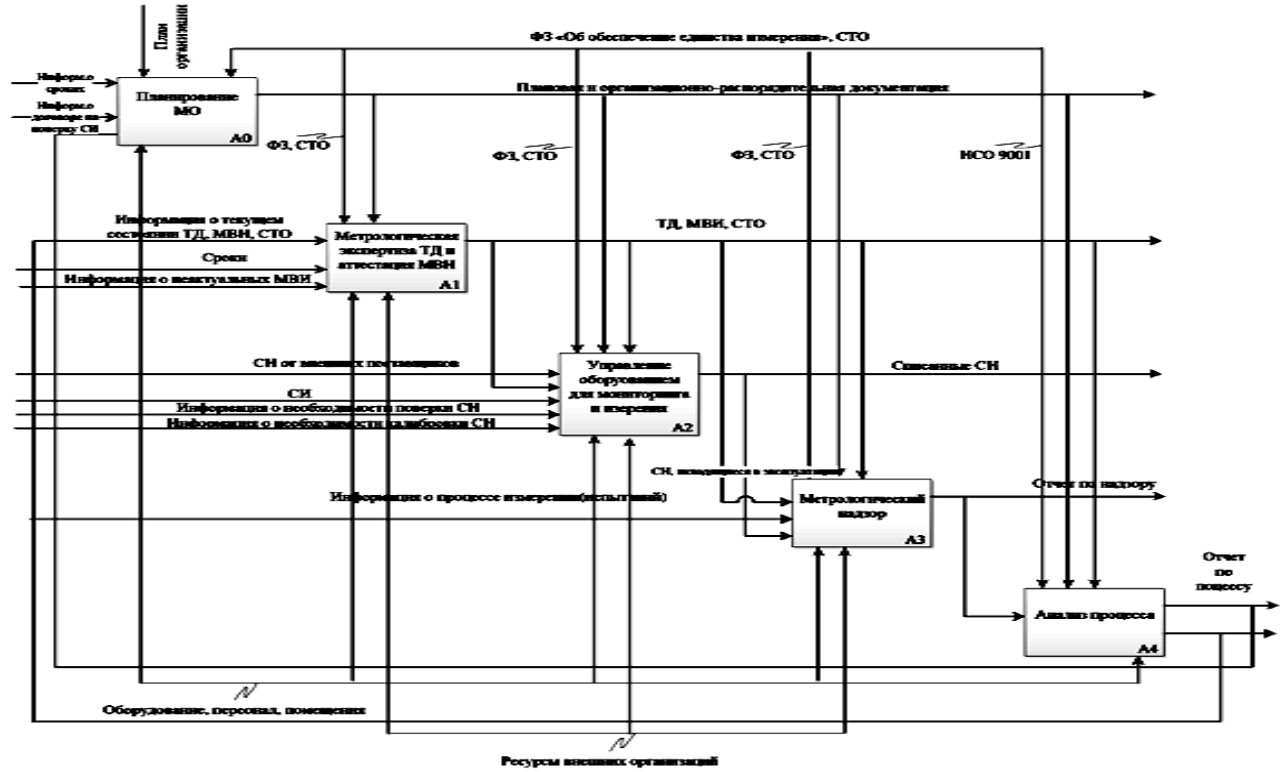


Рис. 2. Декомпозиция процесса метрологического обеспечения производства на Костромской ГРЭС

В результате исследований были сформулированы следующие предложения:

1. Макропроцессы на предприятии, в том числе процесс метрологического обеспечения следует описывать с применением методологии структурно-функционального моделирования IDEF0, оформляя в виде карт (книги) процессов предприятия.

2. Подпроцессы следует описывать в СТО, допуская отсутствие в нем IDEF диаграмм.

3. Целесообразно автоматизировать процессы.

При автоматизации некоторые функции возлагаются на технику и компьютерные программы. В области метрологического обеспечения благодаря автоматизации можно:

– свести к минимуму время поиска того или иного необходимого средства измерений;

– сократить количество людей для поиска и выбора этих средств измерений;

– вести учёт с целью поддержания работоспособности средств измерений;

– проводить их систематизацию [2].

Как видим, для эффективного функционирования этих сложных процессов, а также значительного её повышения необходимо использовать автоматизированные системы управления, такие как, например, автоматизированное рабочее место руководителя (АРМ-Р), автоматизированные рабочие места поверителей (АРМП) и др.

При реализации автоматизации деятельности метрологических служб решаются задачи оптимального планирования их деятельности путём создания автоматизированных рабочих мест (АРМ).

Автоматизированное рабочее место (АРМ) – совокупность средств вычислительной техники, специальных технических средств, соответствующего информационного, математического и программного обеспечения, предназначенных для решения конкретных задач на соответствующем уровне автоматизации.

В состав технических средств АРМ (аппаратное обеспечение) входят ПЭВМ, контроллеры периферийных устройств, интерфейсы и необходимые периферийные устройства (монитор, клавиатура, принтер, модем и др.), а также специальные технические средства.

Поскольку АРМП является разновидностью АРМ, то его аппаратное обеспечение состоит из трёх составляющих:

1) средства вычислительной техники;

2) средства измерений (рабочие эталоны и рабочие средства измерений);

3) вспомогательные устройства (коммутатор, устройство управления и др.).

Для автоматизации метрологического комплекса требуется наличие в СИ приборных интерфейсов и управляемого коммутатора. Это позволяет дополнительно автоматизировать операции коммутации СИ и управления режимами работы СИ в процессе поверки. Степень автоматизации повышается, снижается утомляемость поверителя и уменьшается вероятность субъективных ошибок, но поверяются только СИ, имеющие приборный интерфейс.

АРМП (рис. 3) обеспечивает управление по заданной программе рабочим эталоном (РЭ), вспомогательными СИ (ВСИ) и поверяемым СИ (ПСИ) полностью или частично без участия поверителя. Эта возможность значительно повышает эффективность поверки, но требует разработки специального программного обеспечения, создания управляемого коммутатора цепей и наличия у СИ метрологического комплекса приборных интерфейсов. Такие АРМП делают специализированными, т.е. предназначенными для поверки определённой номенклатурной группы СИ [3].

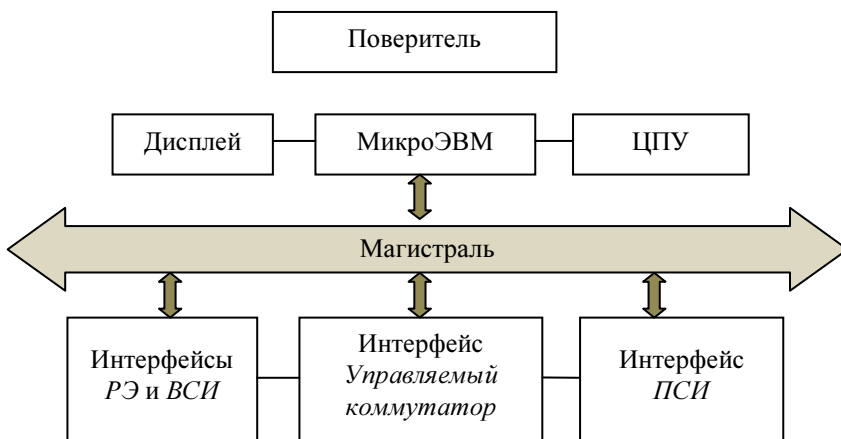


Рис. 3. Структура АРМП

Внедрение автоматизированной системы управления метрологическим обеспечением на Костромской ГРЭС позволит соответствовать постоянному возрастанию требований к соблюдению метрологических правил и норм, направленных на повышение технического уровня измерений, их точности, надежности и производительности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галеев В.И.* Кухня процессного подхода / В.И. Галеев, К.В. Пичугин // Методы менеджмента качества. 2003. № 4. С. 12–21.
2. Автоматизация метрологического обеспечения на предприятиях / И.Г. Кошлякова, Е.В. Пеева, К.О. Суворова, Е.А. Кошлякова // Вестник Донского гос. техн. ун-та. 2010. Т. 10, № 3(46) С. 333–338.
3. Проверка и ремонт электронных средств измерений: учебное пособие / А.Г. Леонтьев, А.А. Васильченко И.А. Павлов, Н.А. Егоров. СПб.: ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский гос. ун-т аэрокосм. приборостроения», 2006. 151 с.

УДК 697.341

О. Ю. Марьясин¹, А. С. Колодкина², А. А. Огарков¹

¹Ярославский государственный технический университет

²Ярославский промышленно-экономический колледж

Россия, Ярославль, e-mail: maryasinou@ystu.ru,

drivemox@mail.ru, anuta__25@mail.ru

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ
МИКРОКЛИМАТОМ И ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЕМ ЗДАНИЙ**

В работе рассмотрены современные методы управления микроклиматом и энергопотреблением зданий. Наиболее перспективными из них, по мнению авторов, являются методы оптимального прогнозирующего управления. В результате сравнения различных версий MPC-алгоритмов установлено, что иерархический распределенный MPC-алгоритм обеспечивает наилучшее качество управления и наибольшую экономию энергии.

Ключевые слова: микроклимат, энергопотребление зданий, MPC, MATLAB, Simulink.

O. Yu. Maryasin¹, A. S. Kolodkina², A. A. Ogarkov¹

¹Yaroslavl State Technical University

²Yaroslavl Industrial and Economical College

Russia, Yaroslavl, e-mail: maryasinou@ystu.ru,

drivemox@mail.ru, anuta__25@mail.ru

**MODERN CONTROL METHODS FOR COMFORT
AND ENERGY MANAGEMENT IN BUILDINGS**

The paper considers modern methods for comfort and energy management in buildings. The most promising of them, according to the authors, are methods of model predictive control. As a result of comparing different versions of the MPC algorithms, it is established that the hierarchical distributed MPC algorithm provides the best control quality and the greatest energy savings.

Keywords: *indoor environment, energy consumption of buildings, MPC, MATLAB, Simulink.*

Современные городские жители более 80% своей жизни проводят в закрытых помещениях. Доказано, что микроклимат помещений существенно влияет на физическое и эмоциональное состояние людей, а также на их работоспособность [1]. Поэтому поддержание параметров микроклимата, определенных известными санитарными нормами [2] и комфортных для проживания людей является главной задачей климатического оборудования, установленного в зданиях. С другой стороны, необходимость энергосбережения и снижения коммунальных платежей требует минимизации затрат энергоресурсов на поддержание микроклимата. Обеспечить выполнение этих, часто противоречивых требований, должны комплексные системы управления микроклиматом и энергопотреблением (Energy and Comfort Management System - ECMS) зданий, включающие оборудование систем отопления, вентиляции и кондиционирования (ОВК или HVAC, как их называют на западе) и, в свою очередь, являющиеся частью автоматизированных систем управления зданием.

Сегодня, в западной научной прессе можно найти обзоры по зарубежным системам управления микроклиматом, ECMS системам [3, 4]. Однако, в последнее время, эта тематика становится столь популярной, что ни один обзор не сможет охватить все работы, возникающие в этой области. Кроме того, в западных публикациях практически нет ссылок на работы российских авторов. Поэтому целью данной статьи является обзор основных методов управления микроклиматом и энергопотреблением и определение наиболее перспективных из них для использования в ближайшем будущем.

Традиционно для управления микроклиматом помещений используются термостаты, гигростаты и системы вентиляции с двухпозиционными или трехпозиционными (релейными) регуляторами, реализующие закон управления с обратной связью по отклонению с заданием по температуре, влажности или уровню CO₂. Для уменьшения числа переключений исполнительного устройства, приводящих к его преждевременному износу и сокращению срока службы, в таких регуляторах часто используется так называемая, зона нечувствительности (“мертвая зона” - deadzone). Подобные регуляторы на западе еще называют bang-bang регуляторы. Достоинством таких регуляторов является их простота, а недостатками: низкая точность

поддержания заданного значения, наличие перерегулирования (значительная динамическая ошибка) и, как следствие, большие затраты энергии на управление.

Для устранения указанных недостатков на практике все чаще используются ПИ- и ПИД-регуляторы и их многочисленные модификации (ПД, ПД2 и т.д.). Они позволяют точно поддерживать заданное значение параметра, под воздействием контролируемых и неконтролируемых возмущений, минимизируя при этом динамическую и статическую ошибку регулирования. Как показали результаты численных экспериментов [5], при управлении тепловым режимом помещения, применение ПИД-регуляторов дает экономию тепловой энергии в среднем около 8-10%. Еще большую экономию энергии можно получить при реализации так называемого “прерывистого” режима отопления, когда задание регулятору по температуре в помещении снижается в нерабочее время суток (ночью), в выходные и праздничные дни. Численные эксперименты показали [6], что при реализации “прерывистого” режима отопления обеспечивается экономия тепла, по сравнению с системой без “прерывистого” отопления, до 20 %.

Достоинством ПИД-регуляторов кроме указанных ранее, является то, что для их применения часто не требуется знания параметров (математической модели) объекта управления. Существуют методы настройки, например известный метод Циглера-Никольса [7], которые позволяют настраивать ПИД-регуляторы с приемлемым качеством, не определяя заранее параметров объекта управления. Это обстоятельство широко применяется при настройке ПИД-регуляторов в современных системах управления отоплением и вентиляцией зданий.

К недостаткам ПИД-регуляторов необходимо отнести следующее. Они плохо работают, или вообще могут не обеспечивать устойчивость, для объектов с существенными нелинейностями, ограничениями и большим транспортным запаздыванием. При наличии, у объекта, значительных неконтролируемых возмущений, шумов и других неопределенностей необходимо уделять повышенное внимание вопросам робастности ПИД-регуляторов. Кроме того, при синтезе ПИД-регуляторов, как правило, не учитываются требования ресурсо- и энергосбережения.

В настоящее время наблюдаются тенденции снижения стоимости потребительской электроники и микропроцессорной техники, увеличения уровня автоматизации и интеллектуализации инженерных систем зданий, широкое распространение распределенных систем управления, систем типа “Интеллектуальное здание” и “Умный дом”. Новые тенденции дают возможность совершенствования систем управления инженерным оборудованием зданий. В частности, вместо традиционных ПИД-регуляторов

для управления микроклиматом зданий могут использоваться более сложные алгоритмы автоматического и оптимального управления.

В западных публикациях широко представлены работы, в которых для управления микроклиматом зданий предлагаются системы адаптивного и оптимального управления. Ссылки на такие работы можно найти, например в [3, 4]. Преимуществом систем оптимального управления является то, что в таких системах могут одновременно учитываться разнообразные требования как по поддержанию заданных значений параметров микроклимата и обеспечению качества переходных процессов, так и требования минимизации расхода энергоресурсов. При постановке задачи оптимального управления эти требования могут учитываться в критерии оптимальности или вводиться в виде ограничений. В более сложных случаях могут решаться задачи многокритериальной оптимизации.

Одним из существенных недостатков систем оптимального управления является необходимость наличия математической модели объекта управления. Причем от адекватности и точности математической модели существенно зависит качество управления микроклиматом и энергоэффективность. Другим недостатком таких систем, существенно ограничивающим их применение на практике, является сложность их технической реализации. Кроме того, системы оптимального управления, как и ПИД-регуляторы, могут быть чувствительны к различного рода шумам, нелинейностям и неопределенностям.

В западной научной прессе в последнее время активно обсуждается подход, использующий прогнозирующие модели для управления тепловым режимом зданий – Model Predictive Control (MPC) [8]. Этот подход уже давно хорошо зарекомендовал себя при применении в других областях, например в нефтехимии [9]. К достоинствам MPC-подхода можно отнести то, что оптимальный регулятор, синтезированный в соответствии с данным подходом, обеспечивает отсутствие в системе статической ошибки, соблюдение ограничений на управляющие и выходные переменные и обеспечивает компромисс между робастностью и качеством регулирования. Однако, как и большинство оптимальных систем, он требует знания модели объекта управления. И здесь достоинством MPC-подхода является то, что поскольку он реализует закон управления с обратной связью по состоянию и управление рассматривается и реализуется на очень коротком промежутке времени, то для синтеза управления достаточно использовать лишь приближенные, линейные модели. Кроме того, прогнозирующие свойства MPC-регулятора позволяют эффективно подавлять контролируемые возмущения, учитываемые в модели. К сожалению, в нашей стране, данный подход пока очень мало известен широкой научной общественности.

В работе [10] описывается применение MPC-подхода для управления тепловым режимом зданий. В отличие от известных западных работ, в работе [10] используется комплексная двухуровневая модель, включающая как модель теплового режима помещения, так и модель системы теплоснабжения здания. Рассматриваемая авторами структурная схема системы управления тепловым режимом показана на рис. 1, где $T(t)$ – температура внутри помещения, $T_T(t)$ – температура теплоносителя, $T_3(t)$ – задание по температуре внутреннего воздуха, $T_{T3}(t)$ – задание по температуре теплоносителя. Такие двухуровневые системы в зарубежной литературе описываются термином *plantwide optimization*. Они хорошо подходят для решения задачи интеграции локальных систем регулирования в общую систему управления микроклиматом и энергопотреблением.

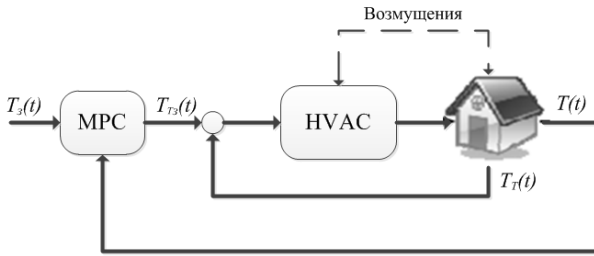


Рис. 1. Структурная схема системы управления тепловым режимом с MPC-регулятором

В качестве математической модели авторы рассматривают модель динамики теплового режима одной секции здания (помещения) без учета инфильтрации, радиационных и бытовых тепловыделений, но с учетом термических масс ограждающих конструкций [10]. В качестве критерия оптимальности уровня используется критерий типа

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [[T(t) - T_3]^T Q [T(t) - T_3] + q(t)^T R q(t)] dt, \quad (1)$$

где $T(t)$ – температура воздуха внутри здания; $T_3(t)$ – заданная температура в здании; q – тепло, полученное от системы теплоснабжения здания; Q – неотрицательно-определенная матрица; R – положительно-определенная матрица. Матрицы Q и R определяют требования к качеству процесса управления и экономии тепла.

Авторы разработали комбинированную компьютерную модель, включающую модель теплового режима помещения и модель системы теплоснабжения здания, в системе Simulink пакета программ MATLAB.

Блок-диаграмма Simulink системы автоматического регулирования теплового режима помещения с MPC-регулятором, реализующая “прерывистый” режим отопления в ночное время с 0 до 6 часов, показана на рис. 2.

В схеме на рис. 2 подсистема House содержит блок-диаграмму модели теплового режима здания, построенную с использованием теплотехнических компонентов Thermal библиотеки Simscape. Основу модели составляют параллельные цепочки элементов, представляющие передачу тепла через ограждающие конструкции (стены, окна, пол и потолок (крышу)). Каждая цепочка включает в себя конвективный теплообмен между наружным воздухом и ограждающей поверхностью, передачу тепла теплопроводностью через ограждающую поверхность и конвективный теплообмен между ограждающей поверхностью и внутренним воздухом помещения. Выходным сигналом подсистемы является температура воздуха внутри контрольных помещений здания.

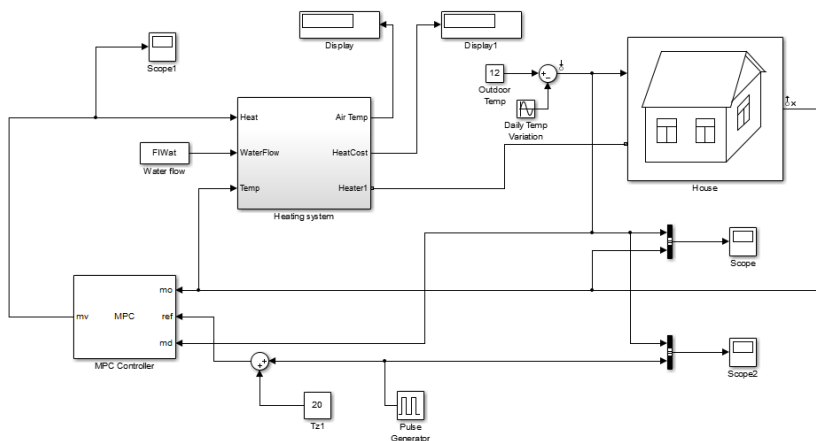


Рис. 2. Блок-диаграмма Simulink системы управления с MPC-регулятором, реализующим “прерывистый” режим отопления

Подсистема Heating system моделирует работу однотрубной системы отопления с верхней разводкой с зависимой схемой присоединения к центральной тепловой сети. Подсистема включает внутренний контур регулирования по температуре обратной воды из системы отопления. Регулирования осуществляется по качественному методу путем изменения степени открытия трехходового регулирующего клапана. Подсистема Heating system имеет выход Heat Cost, который может использоваться для определения суммарного количества тепла затраченного на обогрев здания.

В качестве регулятора верхнего уровня в системе управления используется МРС-регулятор (блок МРС Controller). Данный регулятор использует модель объекта управления, включающую модель теплового режима задания и модель системы отопления, полученную путем линеаризации представленной компьютерной модели. Прогнозирующие свойства МРС-регулятора позволяют эффективно подавлять контролируемое возмущение по температуре наружного воздуха, учитываемое в модели. Задание регулятора по температуре внутреннего воздуха в рабочее время равно 20 °С. Задание регулятору в ночное время с 0 до 6 часов снижается с 20 до 16 °С.

Для сравнения различных алгоритмов, реализующих “прерывистый” режим отопления авторы провели численные эксперименты для трех различных вариантов системы управления на верхнем уровне. На рис. 3 показаны полученные переходные процессы изменения температуры в помещении, в течение сорока восьми часов (двух суток).

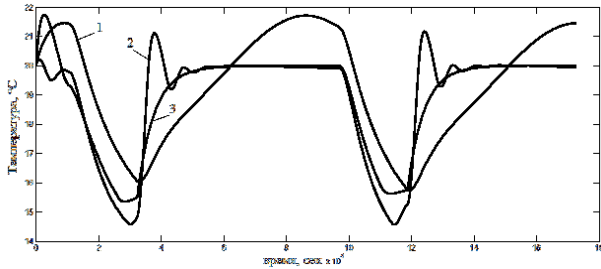


Рис. 3. Переходные процессы различных алгоритмов, реализующих “прерывистый режим” отопления:

1 – с двухпозиционным регулятором; 2 – с ПИД-регулятором;
3 – с МРС-регулятором

Анализ графиков показывает, что МРС-регулятор позволяет получить, по сравнению с другими алгоритмами, наилучшее качество регулирования при высокой экономии тепла.

В последнее время наравне с широким распространением систем типа “Интеллектуальное здание” и “Умный дом” происходит переход от централизованных систем теплоснабжения к децентрализованным системам, квартирным тепловым пунктам и локальным системам теплоснабжения, в том числе с использованием нетрадиционных источников энергии. Все это приводит к тому, что практически в каждом помещении здания может работать своя локальная система управления тепловым режимом. В этом случае возникает задача управления микроклиматом и энергопотреблением здания, состоящего из множества зон (секций, помещений).

Так как зоны здания имеют общие ограждающие конструкции, то на микроклимат в каждой зоне оказывает влияние микроклимат в соседней зоне. Это влияние тем сильнее, чем выше разность значений параметров микроклимата в соседних зонах, больше площадь общих ограждающих конструкций и выше их коэффициент теплопередачи.

В работе [11] рассматривается решение задачи оптимального управления многозонным зданием на основе MPC-подхода. В качестве критерия оптимальности в работе [11] использовался критерий типа

$$J = \sum_{i=1}^N J_i, \quad (2)$$

где J_i – критерий вида (1). Ограничения задачи включают локальные ограничения по заданной температуре в помещении

$$T_{i\min}(t) \leq T_i(t) \leq T_{i\max}(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

и ограничения на расход энергоресурсов

$$q_{ik\min}(t) \leq q_{ik}(t) \leq q_{ik\max}(t), \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

где $q_i(t) = [q_{i1}(t), \dots, q_{ik}(t), \dots, q_{iK}(t)]$; $q_{ik}(t)$ – расход k -го вида энергоресурсов; K – число видов энергоресурсов.

Для решения задачи, описываемой системой (2) - (4) в работе [11] используется MPC-подход, реализованный в различной форме: централизованной, децентрализованной и распределенной.

Для централизованного MPC-алгоритма (сMPC) поставленная задача оптимального управления рассматривается в целом, как задача управления многомерным объектом. Однако при большом числе зон (помещений), из-за высокой размерности задачи, увеличиваются вычислительные затраты на ее решение, а следовательно, увеличивается время на реализацию оптимального управления. Это может привести к снижению качества управления.

Если связи между подсистемами игнорируются, то в таком случае получается децентрализованная система оптимального управления. Децентрализованная система функционирует как совокупность автономных подсистем. Игнорирование взаимосвязей приводит к ошибкам, которые тем больше, чем сильнее характер связей между подсистемами. Такой системе соответствует децентрализованный MPC-алгоритм (dMPC). Данный вариант управления будет эффективным только тогда, когда параметры микроклимата в соседних секциях здания равны или близки по значению.

Если подсистемы могут обмениваться между собой информацией о значениях температур в каждой секции по каналам связи, то тогда возможно построение распределенной системы оптимального управления. В распределенной системе оптимального управления учитываются связи

между подсистемами, но локальные задачи оптимизации решаются подсистемами нескоординированно. Это может привести к тому, что минимум суммы локальных критериев оптимальности не будет достигать минимума критерия J для централизованной задачи управления. Распределенной системе соответствует распределенный MPC-алгоритм (DMPC). Такой вариант управления может использоваться тогда, когда в целях упрощения, не ставится задача координации локальных подсистем и система управления не разделяется на уровни.

Если в распределенной системе оптимального управления учитываются связи между подсистемами и необходима координация решения локальных задач оптимизации с целью достижения минимума глобального критерия J , то в этом случае требуется построение иерархической распределенной системы оптимального управления. В такой системе на нижнем уровне будут решаться локальные задачи оптимизации, а на верхнем уровне задача координации. Данному варианту соответствует иерархический, распределенный MPC-алгоритм (HDMPC).

В работе [11] были исследованы различные варианты решения задачи оптимального управления тепловым режимом здания. Для реализации математических моделей и выполнения расчетов были разработаны компьютерные модели системы оптимального управления тепловым режимом трехсекционного здания в системе MATLAB/Simulink. Компьютерные модели различались по виду использованного MPC-алгоритма: централизованного, децентрализованного, распределенного и иерархического распределенного.

В качестве источников тепла рассматривалось центральное водяное отопление и электрическое отопление с возможностью местного регулирования температуры. Значение $T_{\min}(t)$ принималось $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, $T_{\max}(t)$ - $22\text{ }^{\circ}\text{C}$. Для водяного отопления значение q_{\max} принималось 5 кВт , для электрического отопления $q_{\max} - 2\text{ кВт}$. Изменение температуры внешней среды на интервале времени от 0 до 24 ч моделировалось гладкой периодической функцией с амплитудой $3\text{ }^{\circ}\text{C}$ и центральным значением $12\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Результаты численных экспериментов, полученные в результате проведения нескольких серий экспериментов, для каждого варианта оптимального управления приведены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты численных экспериментов

Используемый MPC-алгоритм	Значение критерия J , Вт
Централизованный	177841
Децентрализованный	176465
Распределенный	178122
Иерархический распределенный	177850

Энергосбережение для иерархического распределенного MPC-алгоритма практически совпадает с энергосбережением для централизованного MPC-алгоритма. Однако, как показали численные эксперименты, качество поддержания теплового режима для иерархического распределенного MPC-алгоритма лучше.

Таким образом, для управления микроклиматом и энергопотреблением зданий могут применяться различные варианты MPC-алгоритма. Учитывая общую тенденцию широкого распространения распределенных систем управления, такой подход к построению систем управления микроклиматом и энергопотреблением зданий, в настоящее время может стать все более перспективным.

СПИСОКЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кувшинов Ю.Я.* Основы обеспечения микроклимата зданий: Учеб. для вузов / Ю.В. Кувшинов, О.Д. Самарин. М.: Изд-во Ассоциации строит. вузов, 2012. 200 с.
2. СанПиН 2.1.2.1002-00 «Санитарно-эпидемиологические требования к жилым зданиям и помещениям».
3. A review on optimized control systems for building energy and comfort management of smart sustainable buildings / P.H. Shaikh, N.M. Nor, P. Nallagowngan, I. Elamvazuthi, T. Ibrahim // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2014. 34. P. 409–429.
4. *Колодкина А.С.* Компьютерное моделирование системы автоматического управления тепловым режимом здания / А.С. Колодкина, О.Ю. Марьясин // Сб. тр. XXVI междунар. науч. конф. “Мат. методы в технике и технологиях ММТТ-26”. Т. 1. Нижний Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т, 2013. С. 69-71.
5. *Колодкина А.С.* Компьютерное моделирование энергоэффективных алгоритмов управления теплоснабжением зданий / А.С. Колодкина, О.Ю. Марьясин // Сб. тр. XXVII междунар. науч. конф. “Мат. методы в технике и технологиях ММТТ-27”. Т. 5. Тамбов: Тамбовский гос. техн. ун-т, 2014. С. 20-23.
6. *Astrom K.* *Pid Controllers: Theory, Design and Tuning* / K. Astrom, T. Hagglung // Instrument Society of America: Research Triangle Park. 1995. 354 p.
7. *Dounis A.I.* *Advanced control systems engineering for energy and comfort management in a building environment* / A.I. Dounis, C. Caraiscos // *A review. Renew. Sust. Energ. Rev.* 2009. 13(7). P. 1246–1261.
8. *Freire R.Z.* *Predictive controllers for thermal comfort optimization and energy savings* / R.Z. Freire, G.H. Oliveira, N. Mendes // *Energy and Buildings*. 2008. (40). P. 1353–1365.
9. *Morari M.* *Model predictive control: past, present and future* / M. Morari, J. Lee // *Computers and Chemical Engineering*. 1999. Vol. 23. P. 667–682.
10. *Марьясин О.Ю.* Управление тепловым режимом зданий с использованием прогнозирующих моделей / О.Ю. Марьясин, А.С. Колодкина // *Вестник СамГТУ*. 2017. № 1 (53). С. 122-132.
11. *Марьясин О.Ю.* Методы оптимального управления теплоснабжением зданий с использованием прогнозирующих моделей // Тр. XIX междунар. конф. Самара: ООО “Офорт”, 2017. С. 172–177.

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ И НАУКИ О ЗЕМЛЕ

УДК 628.544:546.723

Н. Ю. Алешина, Н. С. Яманина

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: tasya16081983@mail.ru

ПОЛУЧЕНИЕ МАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Рассматривается электрохимический способ получения магнитных материалов, применяемых в разных областях.

Ключевые слова: магнитные материалы, электрохимический способ, наноструктурный материал.

N. Yu. Aleshina, N. S. Yamanina

*Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: tasya16081983@mail.ru*

PRODUCTION OF MAGNETIC MATERIALS BY ELECTROCHEMICAL METHOD

We consider the electrochemical method of obtaining magnetic materials used in various areas.

Keywords: magnetic materials, electrochemical method, the nanostructured material.

Магнитные материалы – материалы, вступающие во взаимодействие с магнитным полем, выражающееся в его изменении, а также в других физических явлениях – изменение физических размеров, температуры, проводимости, возникновению электрического потенциала и т. д.

Магнитными материалами могут быть различные сплавы, химические соединения, жидкости [1].

Магнитные материалы широко используются в различных областях техники. Источники питания, фильтры подавления помех, счётчики электроэнергии, телекоммуникационное оборудование, электродвигатели, оборудование для научных исследований. Развитие радио- и электротехники, ядерной и космической техники требует магнитных материалов с совершенно новыми свойствами.

Магнитно-твёрдые ферриты используются в аппаратах с магнитно-вихревым током. Такие аппараты предназначены для измельчения различных материалов с высокой степенью однофазности, эмульгирования и другого. Также ферриты, полученные как из чистых компонентов, так и из отходов производства, могут применяться в качестве адсорбентов для очистки сточных вод [2].

Среди различных способов получения магнитных материалов, таких как керамический метод, из химически соосаждённых смесей гидроксидов, оксалатов, сульфатов и других солей с последующим термическим разложением и ферритизацией при 800-1000 °С, электрохимический метод и другие, был выбран последний – электрохимический. Но некоторые методы имеют ряд недостатков, что и позволило выбрать электрохимический способ:

- 1) протекают в несколько этапов в течение длительного времени;
- 2) требуют большое количество различных реагентов;
- 3) процесс осуществляется при высоких температурах.

Электрохимическими методами получают различные наноструктурные материалы: ультрадисперсные порошки, нанопроволоки, нанопористые материалы, композитные материалы, состоящие из матриц и включённых в них наночастиц, упорядоченные магнитные наночастицы, защитные нанопокрывтия [3].

Электрохимические методы получения наноструктурированных материалов основаны на процессах, протекающих на электродах, помещённых в электролит. Электролитами называются вещества, распадающиеся на ионы при растворении в воде и проводящие электрический ток.

Когда между двумя электродами прикладывается внешнее электрическое поле, заряженные частицы двигаются из одного электрода к другому, и электрохимическая реакция происходит на обоих электродах одновременно. При этом на катоде – отрицательно заряженном электроде – происходит восстановление, а на аноде – положительно заряженном электроде – окисление. Этот процесс, называемый электролизом. На электролизе водных растворов основаны гидроэлектрометаллургия и гальванотехника.

Электролитическое осаждение применяется довольно давно для получения защитных покрытий. Оно основывается на окислительно-восстановительных реакциях протекающих на электродах в растворе электролита при пропускании электрического тока. Большинство современных электрохимических методов получения наноструктурных материалов используют именно такую схему; их условно можно отнести к классическим электрохимическим методам.

Применение электрохимического метода для получения наноструктурных материалов возможно в трех вариантах:

1) электрохимическая анодная обработка полупроводниковых материалов для получения нанопористых структур (травление, процессы протекают на дефектах структуры);

2) получение нанопористых мембран путем анодирования алюминия, титана в растворах кислот;

3) электрохимическое катодное восстановление из растворов электролитов; электрохимическое осаждение металлов, сплавов, полупроводниковых материалов в поры мембран (темплантный синтез).

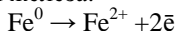
Электрохимические методы все более широко внедряются в технику очистки сточных вод, в частности для опреснения сильно минерализованных вод электролизом с регенерацией индивидуальных солей, кислот и щелочей.

Электрохимические методы развиваются в промышленности опережающими темпами по сравнению с химическими в связи с их очевидными преимуществами. В электрохимических процессах аппаратура во многих случаях проще и компактнее по сравнению с альтернативными химическими процессами, электрохимические методы получения ряда продуктов характеризуются меньшим числом производственных стадий и операций, более дешевым сырьем и большей глубиной его превращения, одновременным образованием (причем в раздельном виде) ценных продуктов. Эти преимущества часто обуславливают более низкую себестоимость получаемой продукции. Одно из главных достоинств электрохимических методов – чистота получаемых продуктов.

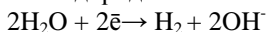
Получение магнитного материала (гексаферрита бария) электрохимическим способом проводилось в несколько этапов:

- ✓ подготовка электродов;
- ✓ подготовка рабочего раствора;
- ✓ проведение синтеза получения магнитного материала;
- ✓ обработка полученного осадка.

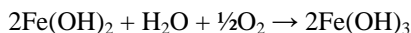
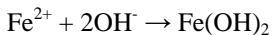
Электрохимический способ в щелочном растворе заключается в проведении электролиза в предварительно подогретом растворе $\text{Ba}(\text{OH})_2$ в качестве электролита при окислении образующихся промежуточных соединений кислородом воздуха. При этом основным процессом на аноде является реакция растворения железа:



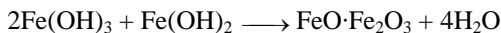
На катоде – выделение водорода:



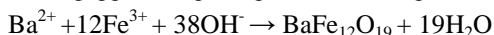
При взаимодействии продуктов анодной и катодной реакции происходит образование гидроксида железа (II), который частично окисляется кислородом воздуха:



Образование магнетита, при взаимодействии гидроксидов 2- и 3-валентного:



Образование гексаферрита бария происходит по реакции:



Подтверждением того, что данный порошок является магнитным материалом, служит рентгенограмма, представленная на рис. 1.

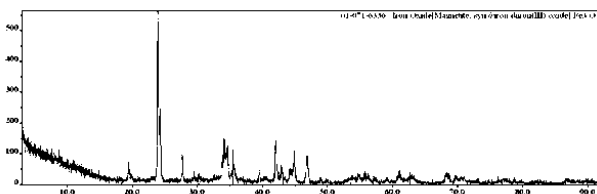


Рис. 1. Рентгенограмма магнитного материала

В ходе рентгеноструктурного анализа установлено в полученном порошке присутствует магнетит Fe_3O_4 и карбонат бария BaCO_3 .

Дальнейшая обработка порошка проводилась исходя из изученного ранее термического способа получения магнитных материалов, в частности гексаферрита бария. В частности данный метод показал, что необходимо прокаливание полученного образца. Прокаливание проводилось при температуре 1000-1200 °С в течение 1 часа.

Рентгеноструктурный анализ прокаленного порошка показал, что после прокаливания в течение 1 часа получен магнитный материал (гексаферрит бария) без примесей магнетита и карбоната бария.

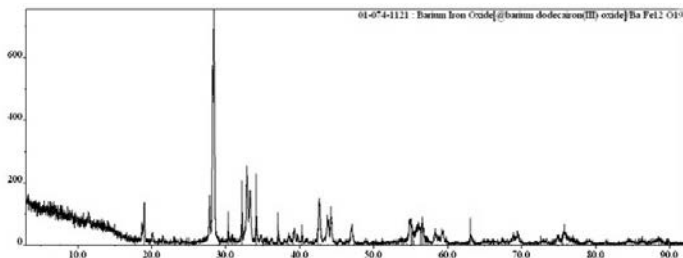


Рис. 2. Рентгенограмма кристаллов гексаферрита бария

Результаты рентгенофазового анализа образца (рис. 2) показывают, что в прокаленном образце было обнаружено три фазы магнитного материала:

- 1) $\text{BaFe}_{12}\text{O}_{19}$ - гексаферрит бария;
- 2) BaFe_2O_4 – орторомбический моноферрит бария с параметрами элементарной ячейки: $a = 19,45 \text{ \AA}$; $b = 5,39 \text{ \AA}$; $c = 8,488 \text{ \AA}$;
- 3) $\alpha\text{-BaFe}_2\text{O}_4$ – гексагональный моноферрит бария с параметрами элементарной ячейки: $a = 10,884 \text{ \AA}$; $c = 8,703 \text{ \AA}$; $\gamma = 120 \text{ \AA}$.

Получение магнитного материала – гексаферрита бария, возможно электрохимическим способом при условии дальнейшего прокаливания шихты. Данный метод получения позволит сократить получение магнитных материалов, а также возможность использовать для их получения отходы производства уменьшая степень вредного воздействия на окружающую среду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калаева С.З.К.* Синтез магнитных жидкостей из отходов горноперерабатывающей промышленности / С.З.К. Калаева, Н.М. Качурин // Изв. ТулГУ. Науки о Земле. Тула: Изд-во ФГБОУ ВО Тульский гос. ун-т, 2015. Вып. 1. С. 3-13.
2. *Мишин Д.Д.* Магнитные материалы: Учеб. пособие. М.: Высш. школа, 1981. 335с.
3. Большие перспективы магнитных частиц. Электронное издание «Наука и технологии России» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.strf.ru/material.aspx?CatalogId=390&d_no=25261#.WdEpUx8Y5TZ

УДК 636.234.1:636.033/.034(470.0)

А. С. Ермишин

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, e-mail: ermishinas@ystu.ru

РЕАЛИЗАЦИЯ ИМПОРТНЫМ СКОТОМ ГОЛШТИНСКОЙ ПОРОДЫ ГЕНЕТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ПРОДУКТИВНОСТИ В УСЛОВИЯХ РОССИЙСКОГО НЕЧЕРНОЗЕМЬЯ

В статье приведен обзор результатов исследования продуктивных качеств импортного скота голландской селекции в условиях Нечерноземной зоны России. Рассмотрен характер реализации животными наследственного продуктивного потенциала, а также даны рекомендации производству.

Ключевые слова: импортный скот, голштинская порода, линии, молочная продуктивность, родительский индекс коровы, адаптация.

A. S. Ermishin

*Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: ermishinas@ystu.ru*

ADAPTIVE AND PRODUCTIVE FEATURES IMPORTED HOLSTEIN CATTLE IN CONDITIONS OF THE UPPER VOLGA REGION OF RUSSIA

The article presents the results of studies of the productive qualities of cattle imported from the Netherlands in the non-Chernozem zone of Russia. We discuss the implementation of the productive abilities of animals. Recommendations for production are presented.

Keywords: *imported cattle, Holstein breed, line, milk production, parental index of a cow, adaptation.*

Импорт в Россию живого скота сродни экспорту газа: прибыли высоки, а «к трубе» допущены не все. Долгие годы этот бизнес держался на убеждении, что хозяйства-покупатели вместе с качественным скотом автоматически получают рост доходов. Но кризис заставил переставить акценты: элитный скот требует элитной инфраструктуры обслуживания, строить ее не на что, и вопрос, как развивать дальше животноводство, встал с новой остротой.

Признано, что российское поголовье крупного рогатого скота генетически себя изжило и не в состоянии дать требуемые результаты. У проблемы есть два решения: ввозить живой скот с хорошей генетикой или семя (не говоря об импорте эмбрионов). Сторонники осеменения указывают на трудности акклиматизации и риск ввоза болезней. Их противники уверены, что семя, наложенное на российский материал, результата не даст. Начиная с 2005 году в рамках национального проекта «Развитие АПК» государство стало субсидировать лизинг живого импортного скота; закупка семени осталась без преференций [1].

В связи с тенденцией накопления большого количества импортного маточного поголовья встала острая необходимость в изучении его адаптационных способностей, того, как реализуют свой продуктивный потенциал животные, отселекционированные на высокую молочную продуктивность с первой лактации [2].

Российское Нечерноземье, особенно его Север, как известно, является зоной рискованного земледелия, но для молочного животноводства – она благоприятная. Одним из регионов Нечерноземья, куда стали завозить импортный скот, является Ярославская область.

В 2002 году сельскохозяйственное предприятие ООО «Новое Щедрино» Ярославской области закупило из Нидерландов 190 нетелей гол-

штинской породы. Наши многолетние исследования направлены на изучение адаптационных способностей импортных животных в нескольких поколениях и выработку научно обоснованных рекомендаций производству, и данная работа является продолжением предшествующих публикаций.

Цель нашей работы заключалась в выяснении характера реализации импортным скотом голштинской породы голландской селекции генетического потенциала продуктивности в условиях ООО «Новое Щедрино» Ярославской области.

Исследование проводилось в 2002 – 2005 годах на базе молочно-варного хозяйства ООО «Новое Щедрино» Ярославской области. Для проведения исследований было отобраны методом репрезентативной (случайной и бесповторной) выборки 60 первотёлок, в том числе 30 импортная корова и 30 их дочь первой генерации.

Генеалогическую структуру стада мы исследовали по картотеке племенных животных формы № 2-мол. Отнесение животных к линиям проводили по методу Н.А. Кравченко (1954) по правой части родословной.

Уровень молочной продуктивности устанавливали по результатам ежемесячных контрольных доений коров. Содержание основных компонентов в пробах молока определено в лаборатории агрохимического анализа на аппаратах «Клевер».

Родительский индекс коров мы рассчитывали исходя из коэффициента путей С. Райта:

$$РИК = \frac{2M + MM + MO}{4}, \quad (1)$$

где *РИК* – родительский индекс коровы по удою или по массовой доле жира (белка) в молоке, кг или %;

M – продуктивность матери, кг или %;

MM – продуктивность матери матери, кг или %;

MO – продуктивность матери отца, кг или %.

Материалы исследований обрабатывались методами вариационной статистики по Е.К. Меркурьевой [3], а также на персональном компьютере с использованием пакета программ «Microsoft Office» с расчётом основных констант популяционной генетики.

Мы изучили и проанализировали фактические данные по молочной продуктивности коров, а также рассчитали их родительский потенциал и оценили его фактическую реализацию.

В стаде ООО «Новое Щедрино» разводят чистопородный голштинский скот трёх линий: Монтвик Чифтейн, Рефлекшн Соверинг и Уес Идеал. Для анализа нами была сформирована репрезентативная выборка скота ($n = 31$ гол.), куда вошли животные всех указанных ранее генеалогических линий.

Если говорить о показателях продуктивности без учёта генотипа, то матери за исключением содержания белка в молоке (3,21 против 3,48%) показали себя лучше своих дочерей – 6088,50 кг – 3,74% против 5976,90 кг – 3,52% (табл. 1 и 2). По обильномолочности имели преимущество по сравнению с другими генеалогическими группами коровы линии Монтвик Чифтейн – 6245,85 кг молока. Однако по содержанию жира и белка в молоке наилучшие результаты были получены от коров-матерей линии Рефлекшн Соверинг – 3,95 и 3,24% соответственно [4].

Таблица 1. Реализация родительского потенциала коровами-матерями по первой лактации в разрезе линий

Показатели	Продуктивность коров M±m	Родительский индекс коров M±m	Разность	
			абсолютная	относительная, %
Линия Уес Идеал, n=10				
Удой, кг	5992,30±264,90	7213,71±1,01	-1221,41±264,91**	83,26
Массовая доля жира, %	3,73±0,09	4,32±0,11	-0,57±0,14**	87,08
Массовая доля белка, %	3,23±0,03	3,42±0,02	-0,19±0,04***	94,58
Линия Рефлекшн Соверинг, n=7				
Удой, кг	5987,86±290,50	7748,17±268,35	-1760,31±395,48**	77,49
Массовая доля жира, %	3,95±0,10	4,38±0,09	-0,45±0,14*	90,08
Массовая доля белка, %	3,24±0,04	3,44±0,04	-0,21±0,06*	94,05
Линия Монтвик Чифтейн, n=13				
Удой, кг	6245,85±228,84	7697,54±228,84	-1451,69±323,63***	81,68
Массовая доля жира, %	3,55±0,10	4,49±0,06	-0,92±0,12***	79,75
Массовая доля белка, %	3,18±0,02	3,43±0,03	-0,24±0,04***	92,99
В среднем по матерям				
Удой, кг	6088,50±133,90	7539,20±111,92	-1450,70±159,68***	81,30
Массовая доля жира, %	3,74±0,06	4,41±0,05	-0,67±0,08***	84,43
Массовая доля белка, %	3,21±0,01	3,43±0,02	-0,22±0,02***	93,67

Примечание: * – разность достоверна при P>0,95; ** – разность достоверна при P>0,99; *** – разность достоверна при P>0,999.

Дочери незначительно уступали матерям в молочной продуктивности, за исключением животных линии Монтвик Чифтейн (почти на 350 кг молока меньше). Массовая доля жира в молоке потомства оказалась значи-

тельно ниже материнских показателей (по всем линиям скота). Однако содержание белка в молоке дочерей всех генеалогических групп превзошло все ожидания (далее мы увидим это по характеру реализации наследственного потенциала продуктивности). Более всех отличились коровы линии Уес Идеал и Монтвик Чифтейн – 3,54 и 3,50% соответственно.

Таблица 2. Реализация родительского потенциала коровами-дочерями по первой лактации в разрезе линий

Показатели	Продуктивность коров	Родительский индекс коров	Разность	
	M±m		M±m	абсолютная
Линия Уес Идеал, n=11				
Удой, кг	6046,09±209,72	6806,04±0,95	-759,95±209,72**	89,61
Массовая доля жира, %	3,57±0,11	4,06±0,10	-0,49±0,15**	88,05
Массовая доля белка, %	3,54±0,08	3,34±0,03	0,20±0,08*	105,95
Линия Рефлекшн Соверинг, n=9				
Удой, кг	5973,89±202,29	7164,62±7164,62	-1190,73±326,27**	84,06
Массовая доля жира, %	3,41±0,22	3,95±0,07	-0,51±0,24	87,01
Массовая доля белка, %	3,41±0,09	3,32±0,03	0,11±0,10	103,26
Линия Монтвик Чифтейн, n=10				
Удой, кг	5896,18 ± 231,48	7377,07 ± 8,59	-1480,89±231,64***	81,72
Массовая доля жира, %	3,56±0,06	4,10±0,05	-0,54±0,08***	86,93
Массовая доля белка, %	3,50±0,04	3,33±0,02	0,16±0,04**	104,85
В среднем по дочерям				
Удой, кг	5976,90±113,80	7112,80±150,97	-1135,90±89,06***	85,05
Массовая доля жира, %	3,52±0,08	4,04±0,04	-0,52±0,09***	87,66
Массовая доля белка, %	3,48±0,04	3,33±0,01	+0,15±0,04***	104,82

Примечание: * – разность достоверна при P>0,95; ** – разность достоверна при P>0,99; *** – разность достоверна при P>0,999.

Родительский индекс матерей по удою составил 7539,20 кг молока, по массовой доле жира – 4,41, белка – 3,43% в среднем (см. табл. 1). Выше всего продуктивный потенциал у коров линии Рефлекшн Соверинг и Монтвик Чифтейн – более чем 7,5 тыс. кг молока с содержанием жира и белка в нём почти 4,50 и 3,50% соответственно.

Родительский индекс дочерей по удою составил 7112,80 кг молока, по массовой доле жира – 4,04, белка – 3,33% (см. табл. 2). Самый высокий генетический резерв продуктивности был выявлен у животных линии Монтвик Чифтейн и Рефлекшн Соверинг – около 7200 кг молока жирностью 4,00 и содержанием белка 3,32%.

Рассчитанные родительские индексы продуктивности коров оказались довольно высокими. Наследственный потенциал матерей по всем показателям превзошёл дочерний, что неудивительно, так как матери матерей и отцов коров выращивались в совершенно других условиях среды, несомненно, более лучших, чем российские. Однако по реализации наследственно обусловленной продуктивности были выявлены несколько иные результаты.

Как видим по табл. 1, в среднем матери достаточно высоко реализовали свой продуктивный потенциал: выше всего – по содержанию белка в молоке (93,67%). Среди материнской части выборки по реализации наследственных возможностей особо можно выделить животных линии Уес Идеал: по удою и содержанию белка в молоке они явили наилучшие показатели – 83,26 и 94,58% соответственно. По содержанию жира в молоке генетический резерв лучше всего раскрыли коровы линии Рефлекшн Соверинг (90,08%).

Однако по сравнению с матерями их дочери имели преимущество в реализации своего генотипа (см. табл. 2). Об этом можно достоверно ($P \geq 0,999$) судить даже по усреднённым показателям: родительский индекс по удою раскрыт 85,05%, по содержанию жира – на 87,66 и, что особенно интересно, по содержанию белка в молоке – на 104,82% (такая картина прослеживается по всем линиям).

Среди дочернего потомства имели преимущество также коровы линии Уес Идеал, причём по всем учтённым показателям: по величине удою генетический потенциал реализован на 89,61%, по массовой доле жира и белка в молоке – на 88,05 и 105,95% соответственно.

Таким образом, можно отметить, что степень реализации наследственно обусловленной продуктивности относительно высока. Причём дочери проявили свой продуктивный родительский потенциал лучше матерей, особенно по содержанию белка в молоке. Безусловно, такая успешная адаптация животных на уровне молочной продуктивности без учёта прочих хозяйственно-полезных признаков в условиях ООО «Новое Щедрино» обусловлена не только генетическими факторами, но и во многом факторами кормления: примерно 75% различий в молочной продуктивности животных обусловлены средовыми (паратипическими) факторами, и только 25% – генотипическими, то есть влиянием наследственности.

На рис. 1–3 приведены лактационные кривые по средним показателям молочной продуктивности первотёлочек в исследуемых группах. Рис. 1 наглядно иллюстрирует картину повышения удоя к седьмому месяцу лактации. Раздой по суточным показателям составляет до 13,5 кг (суточный удой – 23 кг) у матерей и до 13 кг (суточный удой – 21 кг) – у дочерей; правда, у последних первый пик лактации был на третьем месяце (раздой – на 12 кг, суточный удой – 20 кг). Дело в том, что у многих животных лактация не заканчивается десятью месяцами, а продолжается до года и дольше. Это вызвано затяжными сервис-периодами, во многом обусловленными гинекологическими заболеваниями, такими как, например, эндометриты, которые, в свою очередь, развиваются вследствие задержания лохий и последа у коров [5].

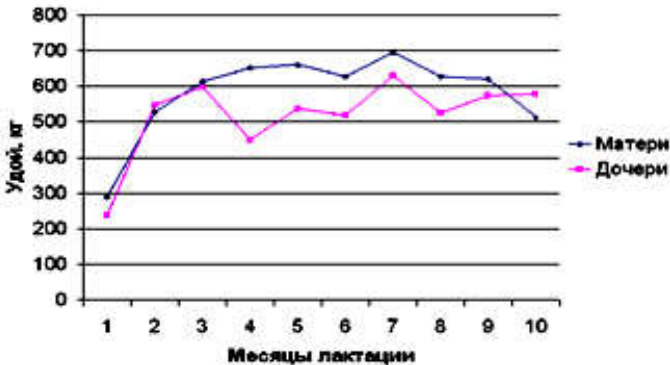


Рис. 1. Лактационные кривые коров-матерей и дочерей по удою

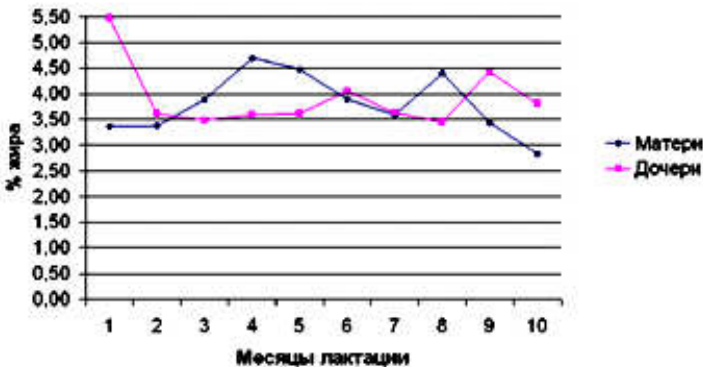


Рис. 2. Лактационные кривые коров-матерей и дочерей по содержанию жира в молоке

Кривые содержания жира в молоке матерей и дочерей (см. рис. 2) за период лактации идут в диссонанс: корреляция между ними очень слабая отрицательная ($r = -0,01$) и недостоверная [2].

Содержание белка в молоке и коров-матерей и дочерей имело сходную динамику. Пик массовой доли молочного белка приходился на пятый–шестой месяц лактации, после чего находился примерно на одном уровне: у матерей – 3,25, у дочерей – 3,50%.

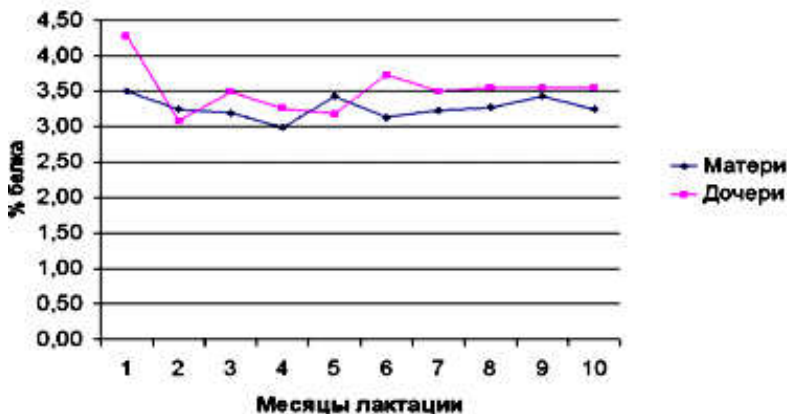


Рис. 3. Лактационные кривые коров-матерей и дочерей по содержанию белка в молоке

На одну кормовую единицу в рационах матерей приходилось 103,90 г переваримого протеина, что является нормой. Углеводно-протеиновое отношение составило 1,61 : 1 против нормы 2 – 3 : 1. Это могло сказаться на содержании жира в молоке. Высокий уровень белка в молоке коров-дочерей объясняется, главным образом, повышенным уровнем кормления, хотя и разбалансированным по основным питательным веществам. В расчёте на одну кормовую единицу у них в рационах приходилось 131,30 г переваримого протеина, что повлекло за собой протеиновый перекорм и перерасход кормов, особенно таких дорогостоящих, как комбикорм. При длительном протеиновом перекорме происходит перегрузка почек продуктами белкового метаболизма, нарушение обмена веществ и угнетение процессов брожения в рубце и, как следствие, снижение содержания жира в молоке.

В рационе дойных коров не хватало грубых кормов. Доля сена в структуре рациона значительно меньше нормы, а именно – менее 3% (рекомендовано 14–15%), что не могло не сказаться на удое и составе молока. Главным образом, изменилась массовая доля жира в молоке. Она снизи-

лась на 0,22%, удой меньше на 1% в сравнении с матерями. Однообразное силосное кормление (35–40 кг на 1 голову в сутки) привело к снижению удоев, а в дальнейшем можно недополучить молока на 12% [6]. Снижению жира в молоке способствовало нарушенное сахаропротеиновое отношение – 0,68 : 1, тогда как по физиологической норме оно должно составлять 0,8 – 1 : 1.

Понятно также, что в рационе не хватало клетчатки. Суточная дача пивной дробины составляла 12 кг, комбикорма – 8 кг. Это вызвало нарушение обмена веществ у дочерей, что видно по диагностируемым заболеваниям [5].

По результатам исследований были сформулированы следующие выводы:

1. Коровы голштинской породы селекции Нидерландов в ООО «Новое Щедрино» имеют в достаточной степени высокий наследственный потенциал продуктивности по первой лактации, причём у матерей родительский индекс выше, чем у их дочерей. Лучшие показатели наследственных возможностей имели коровы линии Рефлексн Соверинг (среди матерей) и Монтвик Чифтейн (среди дочернего потомства).

2. Коровы-дочери реализовали свой генотип лучше матерей, особенно по содержанию белка в молоке (более чем на 100%). Наиболее выдающиеся результаты показали животные обеих генераций линии Уес Идеал. Мы можем рекомендовать зоотехнической службе хозяйства разводить голштинский скот именно этой линии, а также вести активную селекционно-племенную работу животными двух других генеалогических групп.

3. Пик лактации у коров наблюдается на седьмом месяце продуктивного периода, что связано с влиянием лактационной доминанты и гинекологических заболеваний у животных. Вследствие этого, считаем необходимым рекомендовать усиление ветеринарного обслуживания молочного стада и молодняка в ООО «Новое Щедрино».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арсюхин Е.* Живой ужас: Почему сто тысяч импортных коров не перевернули российское животноводство [Электронный ресурс] // Российская Бизнес-газета № 696 [сайт]. Режим доступа: <http://www.rg.ru/2009/04/07/uzhas.html> (дата обращения: 16.07.2017).
2. *Ермишин А.С.* Биологические и хозяйственные особенности молочного скота в стаде ООО «Новое Щедрино» Ярославской области // Материалы VII студ. междунар. науч.-практ. конф. 31 марта 2009. Димитровград: Технол. ин-т. филиал ФГОУ ВПО «Ульяновская ГСХА», 2009. С. 294–298.
3. *Меркурьева Е.К.* Генетические основы селекции в скотоводстве. М.: Колос, 1977. 239 с.

4. Ермишин А.С. Ранговая оценка по основным селекционным признакам импортного скота в России // Вест. ОрелГАУ. 2011. № 6 (33). С. 79–82.
5. Ермишин А.С. Частота встречаемости и характер патологий у импортных коров как показатель их адаптационной способности // Вест. АПК Верхневолжья. 2010. № 4 (12). С. 94–97.
6. Барабанищikov Н.В. Молочное дело / Н.В. Барабанищikov, А.С. Шувариков. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МСХА, 2000. 348 с.

УДК 523.531

Н. А. Седьмов, А. А. Залуцкий, Е. Н. Школьников

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: cross@yandex.ru
e-mail: zalutskii@mail.ru, sh.e.n@mail.ru

МЕССБАУЭРОВСКАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ МАГНИТНОЙ ФРАКЦИИ ИЗ ТОРФОВ ВЕРХОВЫХ БОЛОТ

Методами мессбауэровской спектроскопии и растровой электронной микроскопии изучены 7 образцов магнитной фракции. Образцы получены методом магнитной сепарации из древних погребенных и современных торфяников. Основными минералами исследованных образцов являются гематит и магнетит, имеющих изоморфные замещения в решетке.

Ключевые слова: магнитные частицы, магнетит, гематит.

N. A. Sed'mov, A. A. Zalutskii, E. N. Shol'nikov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: cross@yandex.ru
zalutskii@mail.ru, i@mail.ru

MESSBAUER SPECTROSCOPY OF MAGNETIC FRACTION FROM PEATS OF RAISED BOG

By messbauer spectroscopy and raster electron microscopy we studied 7 samples of the magnetic fraction. The samples were separated by magnetic separation from peats of raised bog. Magnetite and hematite are the main minerals of the samples.

Keyword: magnetic particle, magnetite and hematite.

Введение. Погребенный торф верховых сфагновых болот - это весьма удобный объект для выделения сферических микрочастиц. Он является хорошим аккумулятором данных частиц, что позволяет провести датировку и изучить динамику выпадения данных объектов из атмосферы.

Закисные условия болот способствуют хорошей сохранности металлических сферул. Торфяники хорошо стратифицируются и характеризуются отсутствием переотложенного материала. Методика выделения частиц из торфов достаточно хорошо отработана [1]. В торфяниках обнаружены как магнетитовые, так и силикатные шарики различного размера [2, 3]. Если торф не подвергается индустриальному загрязнению, то количество сферул увеличивается в нижних слоях за счет уплотнения. На этом фоне легко заметить отклонения концентрации частиц в ту или иную сторону. Вблизи крупных предприятий наблюдается резкое увеличение числа частиц в верхнем слое торфа [4]. Так в районе Тунгусского взрыва наблюдается повышенная концентрация сферул в слое торфа, приуроченного к 1908 году. Большинство исследователей считают, что здесь захоронены шарики, образовавшиеся во время тунгусской катастрофы. Правда, некоторые ученые объясняют эту аномалию индустриальным загрязнением торфяного слоя [5].

Объекты и методы. Нами была исследована магнитная фракция, выделенная из заторфованных пород и торфяников Микулинского межледниковья с глубины до 16 м, возраст которых достигал 180 тыс. лет. Данные образцы в нашей коллекции обозначены как 148, 48, 107, и 139. Места отбора проб расположены в пригороде г. Ярославля. Количество магнитной фракции колебалось от сотых долей до нескольких граммов на килограмм сухой породы.

Кроме того, выделялась магнитная фракция из торфяных горизонтов современного верхового болота. Отбор образцов осуществлялся из горизонтов, которые в прошлом подвергались воздействию пожаров. Это связано с тем, что при выгорании органики происходит концентрация магнитных частиц, которые легко выделяются методом магнитной сепарации.

Для выделения магнитной фракции был выбран участок верхового болота, который неоднократно испытывал воздействия пожаров. В разрезе этого участка достаточно хорошо прослеживаются пять различных горизонтов, содержащих торфяную золу. Самый нижний из них, вероятно, подвергся воздействию высокой температуры не менее пяти раз. Для сравнения была выделена магнитная фракция из самого верхнего и самого нижнего горизонтов, а также усредненные пробы, полученные после перемешивания всех горизонтов. Данные образцы соответственно обозначены ТП-1, ТП-5 и ТП-0.

Обсуждение результатов. Изучение магнитной фракции из глубоководных глин с помощью световой и растровой электронной микроскопии показало, что магнитные микрочастицы из погребенных и современных торфяников отличаются по морфологии. Магнитный материал, выделенный из древних заторфованных пород, представлен двумя различными

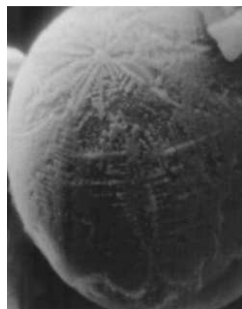
образованиями. Образцы 139, 107 и 48 состоят, в основном, из сферических частиц диаметром 10-30 мкм, которые по морфологическим признакам похожи на сферулы из верхних горизонтов почв и атмосферных выпадений [6]. Внешний вид и строение поверхности этих частиц показано на рис. 1.



Обр.48. Увеличение 740



Обр.107. Увеличение 9500



Обр.48. Увеличение 1860



Обр.148. Увеличение 1030

Рис. 1. Внешний вид магнитных микрочастиц.

Поверхность большинства частиц покрыта дендритными кристаллами. Магнитная фракция, взятая из другого места в том же погребенном торфяном горизонте (образец 148) состоит из сильномагнитных окаменелых остатков органического вещества, имеющих форму “цилиндров”. Сферические микрочастицы в данных образцах практически не встречаются.

Магнитная фракция, выделенная из торфяных горизонтов современного верхового болота (образцы ТП-0, ТП-1 и ТП-5), содержит большое количество сферических образований самого различного вида. Встречаются прозрачные сферулы, по всей видимости, силикатного состава с темными включениями кристаллов магнетита. Очень много окрашенных

сферул: красных и рыжих, поверхность которых покрыта гидроокислами железа. Наблюдается большое количество хлопьевидных частиц неправильной формы красного цвета, которые агрегируются в отдельные скопления. Как правило, центром подобных скоплений являются сильномагнитные частицы черного цвета, иногда сферические, иногда неправильной формы с оплавленными краями.

Все образцы, выделенные из торфов, были исследованы с помощью мессбауэровской спектроскопии с целью определения их фазового состава. Результаты обработки мессбауэровских спектров представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Параметры ЯГР-спектров магнитной фракции из древних торфяников

Образец			$H_{эфф}$	Изомерный сдвиг	Квадрупольное расщеп.	Ширина линии	Относительная площадь
Образец	Температура		кЭ	мм/с	мм/с	мм/с	%
48	300К	1	513	0,64	0,15	0,26	8,1
		2	489	0,58	0,06	0,51	30,9
		3	454	0,91	-0,01	0,74	53,1
		4	-	0,60	1,05	0,96	25,9
139	300К	1	514	0,64	0,18	0,33	13,1
		2	488	0,59	9,04	0,52	25,6
		3	450	0,83	0,05	0,84	28,9
		4	-	0,61	1,01	0,89	32,4
148	300К	1	307	0,70	0,02	0,61	44,7
		2	-	0,59	0,70	0,52	55,3
	120К	1	460	0,79	0,08	0,86	14,8
		2	321	0,82	0,00	0,68	47,0
		3	-	0,68	0,72	0,56	38,2
107	300К	1	308	0,68	0,02	0,61	34,5
		2	-	0,59	0,67	0,46	65,5
	120К	1	474	0,75	0,16	0,83	23,8
		3	322	0,82	0,00	0,64	34,4
		3	-	0,69	0,69	0,50	41,8

Для образцов 139 и 48 получены ЯГР-спектры, которые неоднократно наблюдались для сферических магнитных частиц из почвы и атмосферных выпадений (2015). Как видно из таблицы 1, основными минералами, входящими в состав этих образцов, являются магнетит и гематит, Дублет в центральной части спектра, по-видимому, соответствует Fe^{3+} в силикатной фазе. Гематит, скорее всего, является продуктом окисления магнетита. Надо отметить, при математической обработке спектра, полу-

ченного для образца 139, выявляется уширение линий внутреннего секстета магнетита. Это связано, по всей видимости, с наличием изоморфных замещений в решетке Fe_3O_4 .

Таблица 2. Параметры ЯГР-спектров магнитной фракции из современных торфяных болот

Образец			$H_{эфф}$	Изомерный сдвиг	Квадрупольное расщеп.	Ширина линии	Относительная площадь
Образец	Температура		кЭ	мм/с	мм/с	мм/с	%
ТП-0	300К	1	509	0,61	0,21	0,29	7,5
		2	483	0,59	0,03	0,65	15,5
		3	423	0,60	0,08	1,08	13,5
		4	-	0,59	0,77	0,78	63,5
	120К	1	525	0,71	0,00	0,34	16,2
		2	502	0,68	0,02	0,42	25,5
		3	465	0,67	0,04	0,71	17,1
		4	-	0,69	0,88	0,96	41,2
ТП-1	300К	1	508	0,63	0,16	0,52	9,5
		2	466	0,61	-0,03	1,11	18,1
		3	390	0,85	0,10	3,9	26,7
		4	-	0,60	0,73	0,68	45,7
ТП-5	300К	1	514	0,65	0,18	0,31	7,1
		2	485	0,61	-0,01	0,77	23,2
		3	401	0,69	0,19	1,85	21,4
		4	-	0,59	0,77	0,91	48,3

Мессбауэровские спектры образцов 148 и 107, снятые при комнатной температуре, представляют собой суперпозицию одного секстета и интенсивного дублета. Величина эффективного поля этого секстета гораздо меньше, чем $H_{эфф}$ гематита, магнетита и металлического железа. По величине поля $H_{эфф} = 308$ кЭ, изомерного сдвига $\delta = 0,60$ мм/с и квадрупольного расщепления $\Delta = 0,02$ мм/с его можно отнести к минералам ряда пирротина $Fe_{1-x}S$, где $0 < x < 0,14$ (141-143). Низкотемпературные исследования показали, что при температуре 120К незначительно уменьшается интенсивность дублета и появляется плохо разрешенный секстет линий с величиной эффективного поля $H_{эфф} = 500 \pm 15$ кЭ. Это позволяет сделать предположение, что в дублет линий основной вклад дают ионы железа в структуре силикатов.

В спектре магнитной фракции из усредненной пробы торфяных горизонтов современного верхового торфяника при температуре 300К, фикс-

сируется набор нескольких, плохо разрешенных, секстетов и весьма интенсивный дублет в центральной части. Математическая обработка позволяет выделить в данном спектре три секстета. Первый из них соответствует гематиту, два других - магнетиту. При температуре жидкого азота разрешение спектра магнитной фракции ТП-0 существенно улучшилось. Более уверенно выделяются секстеты магнетита и гематита, интенсивность дублета существенно уменьшается. Это свидетельствует о том, что он обусловлен гидроокислами железа, которые при понижении температуры переходят в ферромагнитное состояние и вносят вклад в секстет линий.

Как показали мессбауэровские исследования, и впоследствии это подтвердилось в ходе термомагнитного анализа, в магнитной фракции из торфа современного верхового болота, содержание магнитоупорядоченных соединений в самом нижнем горизонте, который подвергался многократному воздействию пожаров (обр. ТП-5), выше, чем в верхнем, испытывавшем однократное воздействие пожаров (обр. ТП-1). Это вполне объяснимо. Во-первых, при высокой температуре, в присутствии органики происходит переход гидроокислов железа в магнитоупорядоченные минералы. Так как самый нижний горизонт подвергался воздействию температуры в течение большего времени, чем верхние, то количество ферромагнетиков, образовавшихся в результате этого процесса, в нем больше. Во-вторых, данный горизонт может аккумулировать золу нескольких пожаров и обогащаться магнитными частицами за счет их механического переноса из более верхних горизонтов.

Надо отметить, что в мессбауэровских спектрах образцов ТП-0, ТП-1 и ТП-5 внутренний секстет, соответствующий ионам железа в подрешетке магнетита, заметно уширен. Это, с одной стороны, может соответствовать изоморфным замещениям ионов железа в окта- и тетраэдрических позициях Fe_3O_4 , а с другой стороны, подобное уширение может быть вызвано вкладом гидроокислов, которые имеют $H_{эфф}$ несколько меньше, чем внутренний секстет магнетита.

Выводы. В древних заторфованных горизонтах осадочных пород, возраст которых более 180 тыс. лет встречаются магнитные частицы двух видов: магнитные сферулы и образования цилиндрической формы, состоящие из пирротина. Сферические частицы имеют, по-видимому, космическое происхождение и состоят из гематита и магнетита, который имеет изоморфные замещения в кристаллической решетке.

В магнитной фракции из торфа современного верхового болота содержится большое количество сферических частиц различного минералогического состава. В силикатных сферулах наблюдаются темные включения кристаллов магнетита. Часто поверхность таких частиц покрыта гидроокислами железа. Основным минералом данных объектов является магнетит и гидроокислы железа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Львов Ю.А.* О нахождении космического вещества в торфе // Сборник «Проблема Тунгусского метеорита». Томск. 1967. Вып.2. С.140-144.
2. *Васильев Н.В.* Количественный анализ сферических микрочастиц по материалам сбора их в сфагновых торфах / Н.В. Васильев, М.К. Назаренко, А.П. Бояркина // Метеоритика. 1976. Вып.35. С.69-72.
3. *Васильев Н.В.* О проблеме притока метеоритной материи на Землю / Н.В. Васильев, А.П. Бояркина // Материалы Всесоюз. симп. «Взаимодействие метеорного вещества с Землей и оценка притока метеорного вещества на Землю и Луну». Душанбе, 1974. С.87-92.
4. К оценке выпадения космической и индустриальной пыли на больших площадях / А.П. Бояркина, Н.В. Васильев, П.П. Ваулин, Г.М. Иванов, Ю.А. Львов, Т.А. Меньянцева, Н.А. Мияева, Н.П. Шульга // Тр.Томского гос. ун-та. Томск. 1973. Т 251. Вып.4.
5. О поисках вещества Тунгусского метеорита / Г.М. Иванова, Р.Э. Брувер, Ю.А. Львов, Н.Н. Боронтова // Сб. «Проблема Тунгусского метеорита». Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1967. Вып.2. С.145-148.
6. *Седьмов Н.А.* Динамика притока магнитных сферических частиц на поверхность Земли / Н.А. Седьмов, А.А. Залуцкий // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2015. 91-96.

УДК 539.17:539.126:631.48

А. А. Залуцкий¹, Н. А. Седьмов¹, Е. Г. Моргун²

¹Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: zalutskii@mail.ru, cross@yandex.ru*

²Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Россия, г. Москва, *e-mail: emorgun@mail.ru*

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МЕССБАУЭРОВСКОЙ СПЕКТРОСКОПИИ В ПРИМЕНЕНИИ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ ПОЧВОВЕДЕНИЯ

Сравнительный мессбауэровский анализ с использованием созданной базы данных (7000 спектров) позволил установить широкий набор механизмов трансформации соединений железа в почвах Земли. Процесс дробления почвенных частиц обусловлен физическим процессам выветривания и описывается в рамках теории А.Н. Колмогорова. Впервые в глеевых горизонтах почв Эстонии обнаружены минералы группы фужерита. На базе мессбауэровской спектроскопии прокон-

тролированы окислительно-восстановительные процессы, а также зафиксированы замещенные формы природных двойных слоистых гидроксидов – гидроталькит и пироаурит.

Ключевые слова: Мёссбауэровская спектроскопия, почвенно-минеральные системы Земли, грин раст, минералы группы фужерита, мессбауэрит, треберденит, двойные слоистые гидроксиды, гидроталькит, пироаурит.

A. A. Zalutskii¹, N. A. Sed'mov¹, E. G. Morgun²

¹Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: zalutskii@mail.ru, cross@yandex.ru

³M. V. Lomonosov Moscow State University
Russia, Moscow, e-mail: emorgun@mail.ru

PHYSICO-MATHEMATICAL ASPECTS OF THE MOSSBAUER SPECTROSCOPY IN APPLYING TO SOME OF THE TASKS SOIL SCIENCE

Comparative Mossbauer analysis using the created database (7000 spectra) allowed us to establish a wide range of mechanisms for transformation of iron compounds in soils of the Earth. Process of crushing of soil-particles due to physical processes of weathering and is described in the framework of the theory of A. N. Kolmogorov. For the first time in gley horizons of the soils of Estonia discovered minerals group fugerit. On the basis of mössbauer spectroscopy is controlled by redox processes, and-substituted fixed form the natural layered double hydroxides – hydrotalcite and pyroaurite.

Keyword: Mossbauer spectroscopy, soil-mineral Earth, green plants, fugerit minerals group, mossbauerite, treuberdenite, double layered hydroxides, hydrotalcite, pyroaurite.

Введение. В настоящее время одним из эффективных методов исследования природных систем является мёссбауэровская спектроскопия (МС). Выбор метода МС обусловлен как спецификой объектов исследования (многокомпонентностью и ультрамалыми размерами частиц (1-100 нм)), так и ограниченностью возможностей применения на настоящий момент других физических методов.

Мессбауэровские спектры природных систем в большинстве случаев состоят из большого числа перекрывающихся линий, поэтому математический анализ результатов эксперимента представляет собой довольно непростую задачу.

Предметом настоящей работы является поиск на базе современных теорий адекватных подходов и методик для анализа экспериментальных мёссбауэровских спектров природных почвенно-минеральных систем Земли.

1. Мёссбауэровская база данных почв и почвенных минералов Земли. В настоящее время наиболее полную информацию о мёссбауэровских исследованиях и их результатах можно найти на сайте Центра данных по эффекту Мёссбауэра (MEDC) при университете штата Северная Каролина в США (www.unca.edu/medc). Созданная этим центром информационная система содержит около 40000 библиографических ссылок, в том числе и на открытие эффекта Мёссбауэра. Новые библиографические ссылки регулярно публикуются в ежегодной серии из 10 выпусков журнала Mossbauer Effect Reference and Data Journal (MERDJ). MEDC дополнительно издает отдельные сборники, в которых обобщаются сведения по различным направлениям и объектам исследований с применением МС (минералогия, материаловедение, аналитическая химия, катализ и др.).

Интерес всегда представляют планеты Солнечной системы, для которых и рассмотрим наличие баз данных по МС. Сразу оговоримся, что нам ни разу не удалось найти сколько-нибудь систематизированных мёссбауэровских данных по Луне, за исключением некоторых эпизодических публикаций и частично решаемую задачу в плане некоторой систематизации в монографии Малышевой [1].

Несколько лучше обстоит дело с мессбауэровскими данными по Марсу, выполненных в ходе миссии MER. Впервые задачу по созданию базы марсианских мёссбауэровских спектров, доступную всем желающим, поставил и успешно решил в своей диссертации Д.С. Родионов (ИКИ РАН) [2]. Информацию по мёссбауэровским данным, например, из двух мест посадки марсоходов: кратер Гусева (Gusev crater) и Полуденная равнина (Meridiani Planum) можно взять из приведённого ниже веб-сайта (см., например, (Mars Mineral Spectroscopy Database) <http://www.mtholyoke.edu/courses/mdyar/database/>). Следует особо отметить, что мессбауэровские данные из указанного выше источника представлены в основном в таком виде (иллюстративная картинка спектра, цифровая форма с калибровкой), которая была бы полезна только специалистам по МС. Однако специалистами из Варшавского технологического университета была проведена начальная работа по систематизации марсианских спектров [3]. Начальным пунктом работы по созданию каталога марсианских мёссбауэровских спектров послужила потенциальная возможность для открытого доступа информации из базы данных PDS (Planetary Data System), созданной NASA. Каталог состоит из 815 спектров, измеренных в течение 153 марсианских дней, и доступен на веб-сайте одного из авторов (JGF) [3]. Мёссбауэровские спектры в каталоге разделены на четыре группы по критерию обнаружения в исследованных марсианских грунтах магнитоупорядоченной фазы. По мнению авторов [3], целью создания такого

каталога иметь возможность наиболее быстро сравнивать мёссбауэровские спектры из разных мест поверхности Марса.

Нами на протяжении двух с половиной десятков лет (1980-2005) были изучены объекты различных почвенно-биоклиматических поясов (полярный, бореальный, тропический и т.д.) и различного генезиса (подзолистые, лесные, пеплово-вулканические, погребённые почвы, глубоководные глины Тихого и Индийского океанов) планеты Земля. Было получено и проанализировано более 7000 экспериментальных мёссбауэровских спектров. В результате в мёссбауэровском эксперименте были разработаны различные подходы получения количественной информации специально для почвоведения [4].

Таким образом, автоматически возникла задача по разумной систематизации полученного нами экспериментального материала. Одним из авторов настоящей статьи был создан банк данных по Мёссбауэровской Спектроскопии Планета Земля (МСПЗ), позволяющий оперативно выполнять поиск и просмотр мёссбауэровских спектров для почвенно-минеральных систем Земли. При этом поиск может быть реализован по разным направлениям (географический, физико-химический, минералогический). Для удобства «начинающих» пользователей в банке предусмотрена консультация по современным на настоящий момент методам по математической обработке экспериментальных спектров, выполненных в двухуровневой форме: 1) Качественная МС; 2) Количественная МС. Банк периодически пополняется и в будущем (при потенциально возможной финансовой поддержке со стороны государства или частных спонсоров) будет представлять собой интерактивную систему просмотра и поиска необходимых пользователю мёссбауэровских спектров.

Перейдем к детальному рассмотрению использования банка базы данных по МСПЗ на двух конкретных примерах (см. ниже п. 2 и /или п. 3).

2. Применение МС для исследования и дифференциации почвенных процессов выветривания. Для проведения корректного анализа мессбаэровских параметров спектров можно выделить две характерные области (рис. 1). Первая область объединяет объекты земного (почвы Земли (3)) и неземного (грунты Марса (4) и реголит Луны (5)). Мы предполагаем, что породы в изучаемых системах могут быть подвергнуты процессам, тесно связанным с механизмами физического выветривания горных пород. В пользу сказанного говорят следующие факты. Во-первых, значение ранее введенного нами параметра R (детали см., например, в [5]) для оксида железа, обнаруженного в грунтах Марса, объясняет трансформацию гематита ($\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$) в результате наличия песчаных или пылевых бурь на поверхности планеты. Во-вторых, дополнительно для прямого подтверждения наличия механохимических процессов были изучены почвен-

ные объекты земного происхождения, с одной стороны, примерно схожих по климатической обстановке с Марсом, а с другой – с возможностью исследовать образцы в более широком глубинном диапазоне, а также различных по размерам фракций. Отметим, что в настоящей работе для диагностики указанных выше процессов служила мессбауэровская зондовая метка в форме соединения ильменита (FeTiO_3).

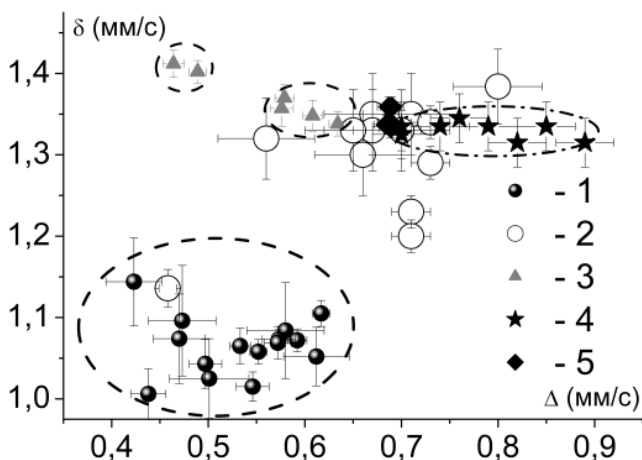


Рис. 1. Области значений параметров сверхтонкой структуры мессбауэровских спектров для зондовой метки в форме соединения ильменита (FeTiO_3), находящегося в системах различной природы: 1 и 3 – почвы Земли; 2 – модельные системы из базы данных MERDJI; 4 – грунты Марса; 5 – реголит Луны

Для самого верхнего горизонта (глубина 4 см, (рис. 2, *a*)) полученные нами результаты удовлетворительно согласуются с математическим подходом, разработанным в 40-х годах прошлого столетия академиком А.Н. Колмогоровым [6]. Он предложил математическую модель процесса дробления частиц, аналитически объясняющую возникновение логнормального распределения размеров частиц при некоторых допущениях. В частности, в рамках модели Колмогорова для выполнения логнормальности распределения частиц при дроблении необходимо, чтобы скорость уменьшения размеров частиц была постоянной, т.е. не зависела от размеров дробящихся частиц. Однако, начиная с горизонта глубиной 13 см, обнаружена тенденция отступления в поведении функции распределения от логнормальности (рис. 2, *b* и *c*), а в самом нижнем горизонте она практически полностью «расплывается». Такая ситуация может быть объяснима

весьма сильным предположением, которое сравнительно недавно было снято подходом [7], где был формулирован критерий (т.е. необходимые и достаточные условия) логнормальности распределения частиц при дроблении, учитывающий непостоянство или случайный характер интенсивности потока соударений.

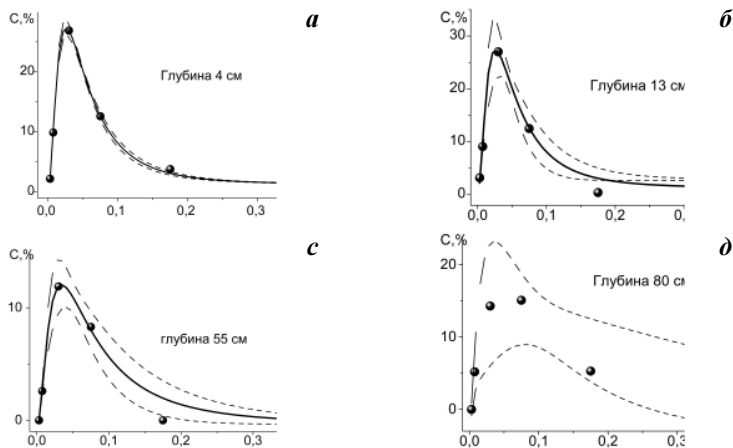


Рис. 2. Содержание $FeTiO_3$ в почвах на туфогенных породах в бассейне р. Подкаменная Тунгуска с различным гранулированным составом:
 а – гор. А0А1, глубина 4 см; б – гор. А2, глубина 13 см;
 с – гор. А2, глубина 55 см; д – гор. В2, глубина 80 см

Качественный без математических деталей (количественный – отдельная задача, выходящая за формат настоящей статьи) анализ данных, полученных с помощью методики МС, позволяет наметить корректный путь дальнейших исследований в нужном направлении. Предварительно отметим только, что для двух систем (см. рис. 2, б и с) установлен набор распределений размера частиц, содержащий, по-видимому, масштабные смеси логнормальных законов, которые могут быть обусловлены согласно [7] случайностью интенсивности соударений дробящейся частицы. Изменчивость скорости интенсивности потока соударений в случайной форме возможна по причине периодической смены времен года, погоды или других природных процессов.

Альтернативной возможностью объяснения в аномальном поведении функции распределения для нижнего горизонта (рис. 2, д) могут служить процессы, связанные с химическим выветриванием пород. Для доказательства были взяты образцы земного происхождения, для которых, с

одной стороны, характерно резкое отличие в значениях мессбауэровских параметров (см., например, величины δ) по сравнению с первой областью (см. рис. 1), а с другой – с потенциальным наличием в них интенсивных химических процессов. Дополнительно в пользу последних процессов наглядно говорят введенные нами ранее значения параметров (см., например, [5]), показывающие доминирующую (по сравнению с механохимией) роль влияния «свободной» воды на процессы формирования оксидогидроксидов железа в почвах Земли.

3. Применение МС обнаружения и диагностики неустойчивых почвенных минералов. В 2004 году Комиссией по новым минералам и названиям минералов Международной минералогической ассоциации был утвержден новый минеральный вид – фужерит (fougerite, (IMA 2003-057)) по названию города Фужер в Бретани (Франция), вблизи которого он был изучен [8]. В нашей стране минералы группы фужерита были обнаружены сравнительно недавно (2012-2013 гг.) в донных отложениях озер Таткуль и Большое Миассово, расположенных на территории Ильменского государственного заповедника [9].

Одна из основных сложностей в поиске минерала обусловлена высокой степенью его «рассеянности» в почвах, что сильно затрудняет изучение объектов с помощью таких традиционных для почвоведения методов как рентгенофазовый анализ (X-ray diffraction – XRD). Неэффективность метода XRD связана с тем фактом, что минерал, выполняя в системе роль фазы-включений (менее 5%), одновременно находится в смеси с другими нанометровыми минералами. Проблема частично может быть снята при использовании в качестве объектов исследования определенного типа почв (лучше подходят оглеенные горизонты, обогащенные слоистыми гидроксидами) с общепризнанным способом для идентификации фужерита – методом МС.

Однако имеется и вторая сложность, тесно связанная со стабильностью минерала. Действительно согласно [10] при вскрытии разреза почвы фужерит быстро, в течение часа окисляется (цвет почвы при этом изменяется от сине-зеленого или сизо-серого до бурого). Поэтому прямое наблюдение сезонных вариаций в содержании и составе фужерита долго оставалось бы практически не решенной задачей, но до появления портативного полевого мессбауэровского спектрометра. Подобные приборы были разработаны для космической экспедиции на Марс [2], из которых один экземпляр специально применили для полевого мониторинга нестабильных минералов железа в оглеенной почве (вблизи г. Фужер) [10]. Прибор находился в поливинилхлоридной трубе, погруженной в почву, и после двухсуточной съемки мессбауэровского спектра (геометрии отражения) на заданной глубине его перемещали на другую глубину для последующего экспе-

римента. Данная методика позволила с хорошей точностью определять, как меняется содержание фужерита во времени и в пространстве (по глубине почвенного профиля).

В нашем случае для диагностики фужерита был разработан специальный, но другой методический подход. Он в какой-то мере подобен представленному выше, но с тем отличием, что диаметр трубы соизмерим с диаметром мессбауэровской кюветы (~ 3 см). Из почвенного разреза сначала отфильтровывались монолиты (по форме и размером школьного пенала) однородного цвета, а затем – при необходимости с последующим вырезанием трубой из разных мест образца в трехкратной повторности. Процедура подготовки объекта ограничивалась временными рамками его нахождения на воздухе (примерно 60 мин.) и строго контролировалась цветом образца с окончательным помещением последнего в мессбауэровскую герметичную кювету.

Очевидно, что описанная выше методика из-за своей трудоемкости не в состоянии напрямую проследить за сезонными вариациями в содержании и составе минерала в оглеенной почве. Однако задача по контролю временного фактора в трансформации состава фужерита может быть решена, но только косвенно. Дополнительно была проведена процедура по выбору кандидатов для дальнейшего мессбауэровского анализа из имеющейся в наличии базы данных МСПЗ. Установлено, что наиболее пригодными оказались оглеенные горизонты (~ 20 разрезов) разных по своему гидроморфизму почв Эстонии, а также примитивные подводные почвы и глубоководные глины Индийского океана. При этом нами еще в 90-х годах прошлого столетия были получены результаты по исследованию почв (тогда еще Эстонской ССР) [11], что несколько раньше по сравнению с пионерской работой по изучению методом МС слоистых гидроксидов в почвах [8]. Наша публикация осталась не замеченной, по-видимому, по следующим причинам. Во-первых, тогда нами решалась совершенно другая задача и фазы, ответственные за фужерит, к сожалению, нами полностью игнорировались. Во-вторых, в какой-то мере такая ситуация объяснима отсутствием у нас на тот момент наличия должного математического подхода при обработке экспериментальных спектров, позволяющего адекватно диагностировать минерал. К тому же, данные фазы по мессбауэровским параметрам очень схожи с величинами, характерными для слоистых алюмосиликатов (или глин). Такое подобное глинам поведение мессбауэровских параметров для фужерита обязано его кристаллическим строением (см., например, [12, 13]). При этом двойные гидроксиды железа иногда называют «анионными глинами» (anionic clays), что подчеркивает их слоистую структуру с высокой емкостью анионного обмена.

В настоящей работе предпринята попытка посмотреть на наши результаты сквозь «призму» фужерита. Мессбауэровские спектры огленных горизонтов почв (рис. 3) характеризуются хорошо разрешенными областями поглощения с различной степенью асимметричности, которые могут быть описаны суперпозицией квадрупольных дублетов: одна пара дублетов по своим параметрам может быть отнесена к двухвалентному железу (Fe^{2+}), а другая - к трехвалентному (Fe^{3+}). К такому выводу по модельной расшифровке экспериментальных данных привел предварительный анализ по восстановленным функциям распределения сдвигов ($p(\delta)$) и квадрупольных смещений ($p(\epsilon)$) компонент мессбауэровского спектра ядер ^{57}Fe в почвах.

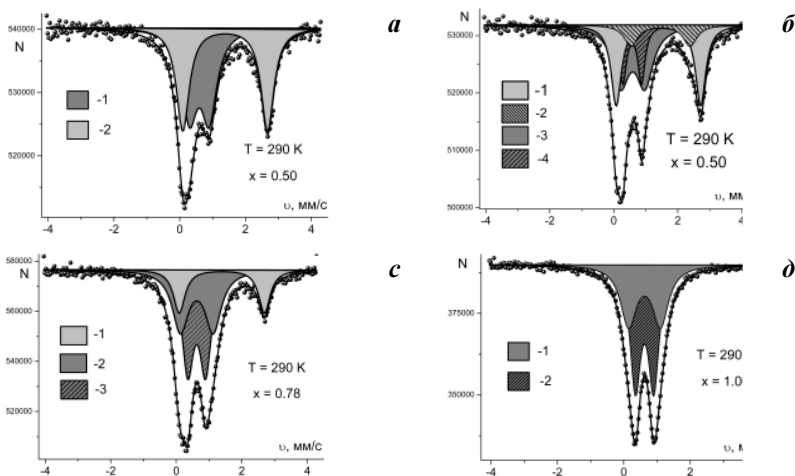


Рис. 3. Мессбауэровские спектры огленных почв Эстонии:

- a* – маршевая дерново-глеявая, гор. Dg, глубина 97-125 см (минерал фужерит);
- б* – маршевая дерново-глеявая, гор. DG, глубина 85-97 см (смесь минералов фужерита и треберденита);
- с* – дерново-поверхностно-глеявая, гор. G, глубина 100 см (смесь минералов треберденита и мессбауэрита);
- д* – дерново-грунтово-глеявая карбонатная рихтовая, гор. GO, глубина 160-180 см (минерал мессбауэрит)

Для корректировки наших природных объектов с данными о синтетических аналогах минералов группы фужерита [13] мы дополнительно воспользовались программой SPECTR (из программного комплекса MStools [14]), созданной на физическом факультете МГУ профессором В.С. Русаковым. В программе предусмотрена возможность реализовать два типа «нежестких» связей (или условий).

Тип 1: Линейная комбинация интенсивностей резонансных линий (или парциальных спектров):

$$W_t(\{b_i\}) = \sum_{j=1}^p C_{ij} S_j . \quad (1)$$

Тип 2: Разность отношения интенсивностей резонансных линий:

$$W_t(\{b_i\}) = \frac{S_{i(t)}}{S_{j(t)}} - \frac{S_{k(t)}}{S_{m(t)}} . \quad (2)$$

Здесь t – номер соответствующей «нежесткой» связи; S_j – интенсивность j -той линии в спектре; $\{C_{ij}\}$ – коэффициенты, определяемые пользователем.

Первый тип «нежестких» связей (1) позволяет сделать любую линейную комбинацию интенсивностей резонансных линий или парциальных спектров равную нулю. Второй тип связей (2) позволяет сделать одинаковыми отношение интенсивностей любых двух компонент спектра.

Как окончательной результат математической обработки (рис. 3) можно проиллюстрировать относительным параметром ($x = \text{Fe}^{3+}/\text{Fe}_{\text{tot}}$), значение которого можно расценивать как диагностический признак присутствия в почве фужерита, треберденита и мессбауэрита или их смесей. При этом применение уравнений (1) и (2) для природных систем в совокупности с градуировочными зависимостями для модельных систем [13] позволяет сделать дифференциальную оценку по относительному содержанию каждого представителя минеральной группы фужерита.

При диагностике минерала группы фужерита с помощью МС для природных систем параллельно нами были установлены некоторые особенности, позволяющие установить или уточнить возможный генезис минерала, а также убрать дискуссионные вопросы, носящие в основном методический характер. Кратко в рамках настоящей статьи остановимся на трех моментах.

Процессы окисления. Важнейшее свойство поведения фужерита (или грин раста) в гидроморфных почвах обусловлено его эфемерностью, т.е. сезонной или периодической обратимостью в (гидр)оксиды железа (см., например, обзор [15], а также в формате настоящей статьи работу [10]). Последующее обратное превращение в фужерит наиболее эффективно может реализовываться при редуccionном растворении устойчивых (гетита и гематита) и/или неустойчивых (гидр)оксидов железа (лепидокрокита, ферригидрита или магнетита).

Рассмотрим более детально возможные процессы окисления природного фужерита. При этом редуccionное растворение неустойчивых (гидр)оксидов железа будет рассмотрено ниже (см. ниже замечание 3), а

устойчивых (в какой-то мере аналога гетита – акаганеита (β -FeOOH)) – частично исследованы нами ранее [16].

Согласно современным данным [15], наиболее популярны два вида механизмов окисления природного фужерита. Первый механизм представляет собой трех ступенчатый процесс: растворение грин раста \rightarrow окисление Fe^{2+} до Fe^{3+} \rightarrow осаждение Fe^{3+} в виде нестабильных гидроксидов. Анализ указанного процесса методом МС имеет свои особенности – с наименьшими затратами диагностируются только две первые ступени. При исследовании термодинамических нестабильных гидроксидов железа (ферригидрит, лепидокрокит) по причине близких мессбауэровских параметров автоматически возникает необходимость использования гелиевых температур. Частично для обычных температур проблема снимается только для оксида железа (магнетита), но необходим специальный подход (см., например, нашу методику в [5]).

Наряду с первым механизмом в почвах может реализовываться и второй механизм – твердофазное окисление фужерита (грин раста) до «ферритового грин раста» (см., например, обзор [15] и ссылки в нем). В результате процесса «старения» ферритовый грин раст может трансформироваться в устойчивые минералы: гетит α -FeOOH и гематит α -Fe₂O₃. По результатам наших исследований методом МС установлено, что в зависимости от внешних условий в почвенной системе образуется как «чистый» гетит, так и смесь гетита с гематитом (см. рис. 4, а и б или с соответственно).

Особо следует отметить, что, по мнению автора обзора [15], «...механизм твердофазного окисления грин раста не характерен для гидроморфных почв: в почвах с хорошо изученным грин растом гетит и гематит не обнаруживают». Однако это утверждение носит дискуссионный характер, поскольку согласно нашим ранним результатам для целого ряда гидроморфных почв Эстонии [11] эти минералы были надежно зарегистрированы с помощью методики МС. При этом более аккуратная математическая обработка мессбауэровских спектров с помощью уравнений (1) и (2) позволила зарегистрировать следы фужерита (рис. 4, с).

Процессы замещения. В состав почвенного раствора (ПР) наряду с элементом железа могут входить магний, алюминий и т.д. В зависимости от внешних условий ПР может динамично меняться, и, как результат в почвенной системе наряду с «чистым» фужеритом могут присутствовать и другие представители природных двойных слоистых гидроксидов.

На основании данных XRD и/или МС было установлено, что минерал фужерит является частично депротонированным гидроксикарбонатом Fe^{2+} - Fe^{3+} с формулой согласно, например, [12, 13] $\text{Fe}_{6(1-x)}^{2+}\text{Fe}_{6x}^{3+}(\text{OH})_{4(4-3x)}(\text{OOH})_{2(3x-1)}\text{CO}_3$, где x находится в диапазоне от 1/3 до 2/3.

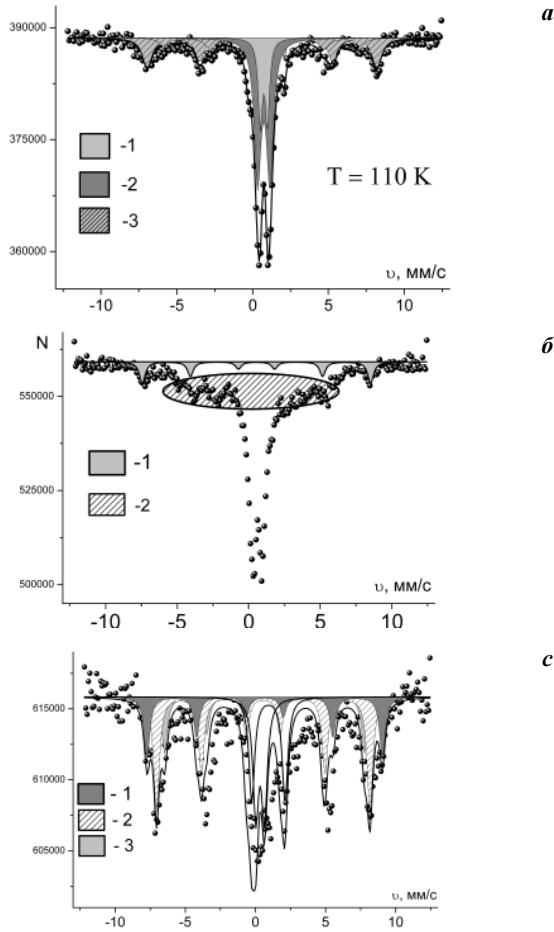


Рис. 4. Мессбауэровские спектры систем, характеризующих процесс окисления фужерита:
a – смесь мессбауэрита (1-2) и почвенного гетита (3);
б – смесь гематита (1) и почвенного гетита (2) ($T = 290 \text{ K}$);
с – смесь гематита (1), почвенного гетита (2 и 3) и «следы» фужерита ($T = 110 \text{ K}$)

Процесс замещение катионов железа магнием Mg^{2+} и/или алюминием Al^{3+} приводит к тому, что имеем два других минерала – пироаурит $[\text{Mg}_6\text{Fe}_2(\text{OH})_{16}][\text{CO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}]$ и гидроталькит $[\text{Mg}_6\text{Al}_2(\text{OH})_{16}][\text{CO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}]$.

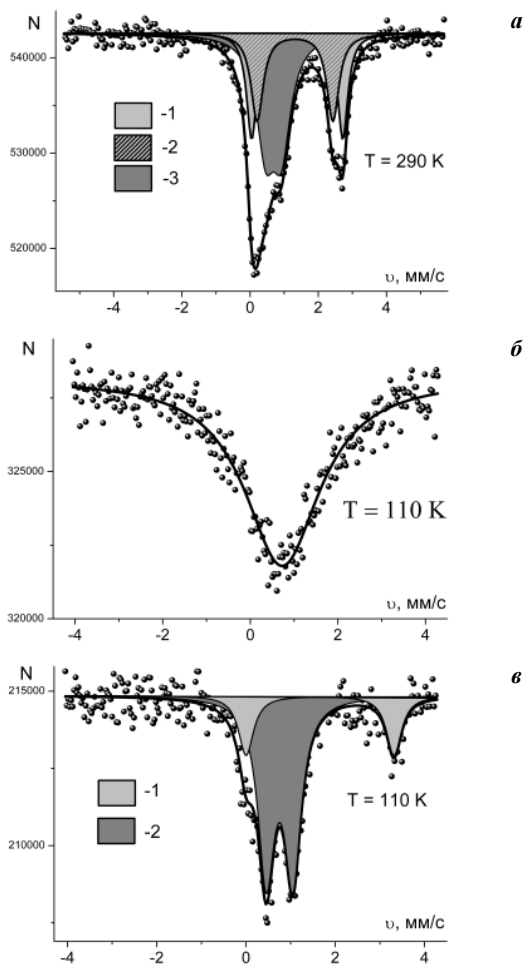


Рис. 5. Мессбаэровские спектры систем, характеризующие процессы замещения в огленных почвах и действие бактерий в модельных системах.
Пояснения в тексте

Математический анализ мессбаэровских параметров спектров для ряда образцов (перегнойно-грунтово-глеевая почва) показал, что в системе присутствует смесь указанных выше двух минералов. Действительно, два дублета для двухвалентного железа (см. (1) и (2) на рис. 5) характеризуют гидроталькит, а третий - пироаурит. Отметим, что диагностика природного

гидроталькита базируется на сравнительном анализе соответствия мессбауэровских параметров с его синтетическим аналогом.

Указанная процедура позволила сделать оценку параметра $[x(\text{Al}^{3+})] \propto 1/3$, значение которого удовлетворительно согласуется с модельными опытами, представленными в работе [17]. Дополнительно в пользу участия в процессах замещения такого элемента, как Al^{3+} , говорят наши данные по почвенным минералам – гетиту ($\alpha\text{-FeOOH}$) и/или гематиту ($\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$) (см. рис. 4). Показательным аргументом могут служить традиционно заниженные по сравнению с модельными системами значения такого мессбауэровского параметра, как среднее эффективное магнитное поле на ядрах $H_{\text{эфф}}$. Аналогичным способом сравнительного анализа мессбауэровских параметров была выполнена диагностика пироаурита. При этом отметим, что присутствие обнаруженного минерала удовлетворительно согласуется с представленной в [17] диаграмме фазовых переходов (фужерит \rightarrow пироаурит \rightarrow гидроталькит), в которой наряду с фужеритом два замещенных минерала выступают в роли «крайних» по параметру x геологических полюсов.

Таким образом, процессы замещения катионов железа магнием и алюминием, происходящих в почвенном растворе, тесно связывает фужерит с другими минералами – пироауритом и гидроталькитом.

Генезис фойгерита. По мнению ряда исследователей (см., например, обзоры [12, 15] и ссылки в них), он обусловлен биоредукцией оксигидроксидов Fe^{3+} в бескислородных условиях. Ранее мы проводили модельный эксперимент по культивированию *Acidithiobacillus ferrooxidans* в присутствии глинистого минерала – монтмориллонита [16], где экспериментально было зарегистрировано блокирующее действие поверхности алумосиликатов на доступность микроорганизмов к ионам железа. Как следствие – не было зарегистрировано переходов типа $\text{Fe}^{3+} \leftrightarrow \text{Fe}^{2+}$. Однако при отсутствии глины и одновременно высоких значениях отношения содержания биологических клеток к содержанию гидрооксидов железа в системе реализуются условия, при которых возможно образование фужерита. Вышесказанное наглядно иллюстрирует экспериментально установленный переход типа $\text{Fe}^{3+} \rightarrow \text{Fe}^{2+}$ для модельных систем (рис. 5, б и в). В качестве примера рассмотрим наши результаты по исследованию методом МС глубоководных глин (описание образцов см., например, [18]).

Для одной части образцов фиксируются «следы» фазы, которую по параметрам мессбауэровского спектра можно отнести к фужериту. Такая ситуация не является чем-то необычным, поскольку для образцов, полученных в Дании (смесь 80% фужерита и 20% глинистых минералов), экспериментально было установлено значение отношения $x = \text{Fe}^{2+}/\text{Fe}^{3+} = 1/2$

[12]. Из наших данных, полученных по методике МС, отношение x удовлетворительно выполняется, и, как следствие, фаза фужерита остается стабильной и в магнетит не трансформируется. Для другой части образцов величина отношения x предполагает наличие в системе магнетита. Поскольку указанный магнитный минерал в почвенных системах сильно «рассеян», то для увеличения разрешения метода МС нами была использована методика магнитного обогащения [5]. Данный подход позволил диагностировать в магнитных фракциях маггемит, что говорит о возможном механизме образования Fe_3O_4 , при котором происходит растворение неустойчивых структур фужерита и их последующим переосаждением в структуру магнетита.

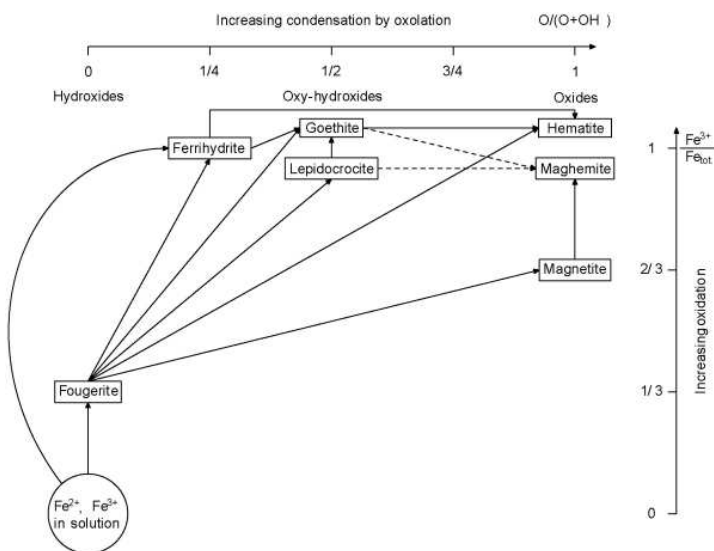


Рис. 6. Природный минерал фужерит в цепочке фазовых трансформаций при формировании структур оксидов и оксигидроксида железа из растворов [19]

Закключение. Представленные выше результаты, полученные с помощью метода МС, можно систематизировать и объединить в одну схему. При этом следует учитывать, что в почвах (т.е. в открытых системах) фазовые трансформации железо-кислородных структур проходят непрерывно в пределах отдельных морфологических рядов или с переходом из одного ряда в другой. Поэтому мы воспользовались общей схемой (рис. 6) трансформации фойгерита при формировании структур оксидов и оксигидрок-

сидов железа из растворов природного происхождения [19]. На качественном уровне наши экспериментально полученные методом МС данные полностью удовлетворяют указанной выше схеме. Однако определение количественных критериев, определяющих ход фазовых трансформаций в почвенных системах, выходит за формат настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мальшиева Т.В.* Эффект Мессбауэра в геохимии и космохимии. М.: Изд-во «Наука», 1975, 168 с.
2. *Родионов Д.С.* Мессбауэровский спектрометр для анализа минералогии железа на поверхности Марса: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2006, 14 с.
3. The Catalogue of Martian Mössbauer Spectra / A. Maliszewski, J. Gałazka-Friedman, K. Szlachta and M. Urbanski // Proceedings of the All-Polish Seminar on Mössbauer Spectroscopy, Warsaw, Poland, June 18–21, 2010. (2011) ACTA PHYSICA POLONICA A .Vol. 119. No. 1. P. 10-11.
4. Технологические и экологические применения мессбауэровской спектроскопии: монография / В.Ф. Бабанин, С.В. Васильев, А.А. Залуцкий, А.В. Иванов, В.В. Морозов, Д.Э. Пухов, А.В. Романюк, Н.А. Седьмов, Е.Н. Школьников; под общ. ред. д-ра физ.-мат. наук В.В. Морозова и д-ра биол. наук В.Ф. Бабанина. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2011. 372 с.
5. Мессбауэровский анализ оксигидроксидов железа в почвах Земли и грунтах Марса/ А.А. Залуцкий, А.А. Залуцкая, Н.А. Седьмов, Р.Н. Кузьмин // Литология и полезные ископаемые. 2015. № 4. С. 305-336.
6. *Колмогоров А.Н.* О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР. 1941. Т. 31. С. 99-101.
7. *Королев В.Ю.* О распределении размеров частиц при дроблении // Информатика и ее применения. 2009. Т.3, вып. 3. С. 60-68.
8. Identification of a Green Rust mineral in a Reductomorphic Soil by Mossbauer and Raman Spectroscopies / F. Trolard, J.M.R. Genin, M. Abdelmoula, G. Bourrie, B. Humbert, and A. Herbillon. // Geochimica Cosmochimica Acta. 1997. Vol. 63. P. 1107-1111.
9. О находках минералов группы фужерита в пресноводных озерах Ильменского заповедника (Южный Урал) / П.М. Вализер, Е.П. Щербакова, Н.К. Никандрова, А.С. Никандров, С.Н. Никандров // Вестник ИГ Коми НЦ УрО РАН. 2013. № 5. май. С. 6-8.
10. In situ Mossbauer spectroscopy – Evidence for green rust (fougerite) in gleysol and its mineralogical transformation with time and depth / F. Feder, F. Trolard, G. Klingelhofer, G. Bourrie // Geochim. Cosmochim. Acta. 2005. V. 69. P. 4463–4483.
11. *Каск Р.П.* Отношение $Fe^{2+} : Fe^{3+}$ и $Fe_O : Fe_d$ в разных по гидроморфизму почвах. / Р.П. Каск, В.Ф. Бабанин, А.А. Залуцкий // Проблемы повышения плодородия почв в Эстонской ССР: Науч. тр. Эст. НИИЗМ, т. LXV, Таллинн, 1989. С.3-15.
12. *Лавриненко Е.Н.* Fe(II)-Fe(III) – слоевые двойные гидроксиды (green rust) // Nanoструктурное материаловедение, 2009. № 4. С. 16—53.

13. Nomenclature of the hydrotalcite supergroup: natural layered double hydroxides / S. J. Mills, A.G.Christy, J.-M. R. Ge ´Nin, T.Kameda And F. Colombo // *Mineralogical Magazine*. 2012. Vol. 76(5). P. 1289–1336.
14. *Русаков В.С.* Мёссбауэровская спектроскопия локально неоднородных систем. Алматы, 2000. 431с.
15. *Водяницкий Ю.Н.* Эфемерные Fe(II)/Fe(III) двойные слоистые гидроксиды в гидроморфных почвах (обзор литературы) // *Почвоведение*. 2015. № 3. С. 277–287.
16. *Залуцкий А.А.* Исследование соединений железа в системе $\text{FeCl}_3 - \text{FeCl}_3 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ – монтмориллонит. К пятидесятилетию открытия эффекта Мёссбауэра / А.А. Залуцкий, Р.Н. Кузьмин, Д.Э. Пухов // *Записки РМО*. 2007. Ч. 136, вып. 7. С. 214–232.
17. Fougerite and $\text{Fe}^{\text{II-III}}$ hydroxycarbonate green rust; ordering, deprotonation and/or cation substitution; structure of hydrotalcite-like compounds and mythic ferrosic hydroxide $\text{Fe}(\text{OH})_{(2+x)}$ / Jean-Marie R. Génin, Rabha Alssa, Antoine Géhin, Mustapha Abdelmoula, Omar Benali, Vibeke Ernstsens, Georges Ona-Nguema, Chandan Upadhyay, Christian Ruby // *Solid State Sciences*. 2005. 7. P. 545–572.
18. *Седьмов Н.А.* Магнетизм микрочастиц из атмосферных выпадений, осадочных горных пород и почв: дис...канд. физ.-мат. наук. М., 1989. 218 с.
19. *Trolard F.* Fougerite. From field experiment to the homologation of the mineral // *C. R. Geoscience*. 2006. 338. P.1158–1166.

Содержание

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

1. Абрамов В.В. Ветвление периодического решения от бесконечности ...	3
2. Белоножко Д.Ф., Очиров А.А., Кокин С.Е. О движении материальных частиц на возмущенной границе раздела двух вязких жидкостей.....	8
3. Бородин А.В. Об одном обобщении теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда.....	14
4. Букушева А.В. Продолжение римановой метрики в расслоение допустимых 2-форм субриманова многообразия.....	29
5. Галаев С.В. Об одном классе продолженной почти контактной структуры с Би-метрикой.....	33
6. Гой Т.П. О некоторых формулах для многочленов Диксона.....	39
7. Коромыслов В.А. Применение системы «Mathematica» при решении систем нелинейных уравнений гидродинамики.....	45
8. Крючков Н.И. Периодические цепные дроби с периодами специального вида.....	49
9. Медведева Л.Б., Сидорова Л.А. Многообразие одномерных бисекант нормальной поверхности степени $n-1$ в n -мерном проективном пространстве.....	55
10. Назимов А.Б. О симметрических и несимметрических частичных суммах рядов Фурье.....	61
11. Очиров А.А. О расчете возмущения магнитного поля волновым движением проводящей жидкости.....	66
12. Панкратов И.А. Эволюционный алгоритм оптимизации перелётов космического аппарата с разрывным управлением.....	70
13. Ройтенберг В.Ш. О полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности без особых точек.....	77
14. Ройтенберг В.Ш. О типичных линейных действиях R^2 на R^4	92

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

15. Бахмутова Н.В., Бельман С.А. Эмоциональный фон как фактор повышения качества преподавания математики.....	109
16. Башкин В.А., Башкин М.А. О прикладной задаче анализа безопасности перекрестков в курсе дискретной математики	112
17. Васильева А.В., Башкин М.А., Бурцев А.И., Березина Л.В. Задачи XVI открытой областной студенческой олимпиады Ярославской области по математике.....	115
18. Гусарова Н.И., Гусаров А.В. Олейникова Е.В. Использование математического аппарата при проектировании и сборке промышленных изделий.....	123
19. Ермишин А.С. Реализация компьютерных технологий в управлении качеством продукции и процессов.....	130
20. Жаров А.Н., Овчинников С.В., Хожайнов А.Н. О преподавании темы: циклические коды.....	135

21.	Иванова Н.И., Куликова М.В. Об интегралах от кусочно-заданных функций.....	144
22.	Крючкова В.В. Управление средствами математики приемами творческого мышления студентов.....	149
23.	Кузнецов В.О. О несуществующих вероятностных распределениях.....	156
24.	Лебедев А.Е., Шмулевский Д.Б., Павлов А.А., Гуменный В.В., Капралов В.В. Применение уравнения Лагранжа 2-го рода к расчету процесса разгона автомобиля.....	160
25.	Ройтенберг В.Ш. Замечание о характеристическом уравнении.....	163
26.	Шевцова А.И. О преподавании математики студентам строительных специальностей.....	166

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

27.	Балунов А.И. Вероятностная модель распределения компонентов атермальных смесей в продуктовых потоках ректификационных систем.....	170
28.	Балушкин А.Л. Особенности расчета армированных стержневых конструкций при усилении методом наращивания.....	183
29.	Белобородов А.В., Митюшов Д.Г., Романов Д.А. Алгоритм оценивания тракторных параметров цели в условиях негауссовой статистики ошибок измерений.....	190
30.	Вечфинский В.С., Соловьева С.С. Наведенная магнитная анизотропия и наклеп конструкционных сталей.....	198
31.	Вилков Г.Г. Оптимизация ректификационных систем.....	204
32.	Зудин В.Л., Маланов А.Г. Определение оптимальных показателей качества изображения на экране с учетом реальных условий наблюдения.....	214
33.	Иванов П.А. Квадратичные и полиномиальные корреляционные фильтры в задачах распознавания изображений на базе оптоэлектронных процессоров.....	219
34.	Ивличев П.С., Ивличева Н.А. Об особенностях применения аппарата математической статистики для прогноза уровня преступности в регионе.....	227
35.	Казаров Е.Г., Рудаков А.М., Новик А.В., Коваленко Т.И. Прикладное применение правил комбинирования экспертных оценок.....	232
36.	Капранова А.Б., Верлока И.И., Таршис М.Ю., Черпицкий С.Н. О различных формах представления уравнения Фоккера-Планка при описании смешивания сыпучих сред в разреженных потоках.....	241
37.	Королев Л.В., Бытев Д.О. Моделирование супердиффузионного процесса в среде с отражающими границами.....	246
38.	Лебедев Д.В., Лебедев А.Е. Обоснование метода акустической диагностики транспортных средств.....	250
39.	Наумов В.А. Решение трехмерной задачи равновесия груза на тросе в воздушном потоке.....	255
40.	Павлов А.А., Лебедев А.Е., Шмулевский Д.Б., Гуменный В.В., Капралов Д.Б. Моделирование термодинамических процессов в детандере паровой машины энергетического комплекса транспортного средства.....	265

41. **Титова Е.В., Абрамов В.В.** Модель оценки объема предложения..... 271
42. **Хожайнов А.Н., Овчинников С.В.** Устройство коррекции амплитудно-фазовых искажений линейно-частотно модулированных сигналов в радиолокационной станции с режимом распознавания..... 277
43. **Швыров В.В., Шишлакова В.Н., Сеняй Р.Н., Капустин Д.А.** Использование нечетких бинарных отношений для управления инвестиционными портфелями в IT-секторе..... 282

ХИМИЯ И ХИМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

44. **Леонтьев В.К., Кораблева О.Н., Барзыкина Д.А.** Интенсификация процесса выпаривания..... 292
45. **Леонтьев В.К., Кораблева О.Н., Сангмамадов М.А.** Методы расчета температурных депрессий..... 296
46. **Макаров В.М., Каласава С.З., Маркелова Н.Л.** Влияние типа вулканизирующей группы каучуко-регенератных смесей на качество резин..... 301
47. **Макарьин В.В.** Описание парожидкостного равновесия азеотропных смесей..... 307
48. **Никитина Е.Л., Макаров В.М., Соловьева О.Ю., Цыбанов А.Н., Данилова А.С., Саповский А.А.** Повышение экологической безопасности подготовительного участка резиновых смесей..... 312
49. **Соловьев М.Е., Власов В.В., Раухваргер А.Б., Осипова М.М.** Моделирование кинетики серной вулканизации резиновых смесей на основе ненасыщенных каучуков..... 317

КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ НАУКИ

50. **Аккуратов Е.Г.** Электронные учебники и базы данных за рубежом: перспективы использования..... 324
51. **Дудин Д.А., Никитенко А.В.** О варианте аутентификации с использованием электронной цифровой подписи на базе алгоритма RSA..... 330
52. **Карташева О.В.** Ресурсы интернета на занятиях по дисциплине «ИТ-инфраструктура предприятия» для направления «Бизнес-информатика»... 335
53. **Леженина Е.С., Ермишин А.С.** Внедрение автоматизированной системы управления метрологическим обеспечением на Костромской ГРЭС..... 339
54. **Марьясин О.Ю., Колодкина А.С., Огарков А.А.** Современные методы управления микроклиматом и энергопотреблением зданий..... 345

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ И НАУКИ О ЗЕМЛЕ

55. **Алешина Н.Ю., Яманина Н.С.** Получение магнитных материалов электрохимическим способом..... 355
56. **Ермишин А.С.** Реализация импортным скотом голштинской породы генетического потенциала продуктивности в условиях российского Черноземья..... 359
57. **Седьмов Н.А., Залуцкий А.А., Школьников Е.Н.** Мессбауровская спектроскопия магнитной фракции из торфов верховых болот..... 368
58. **Залуцкий А.А., Седьмов Н.А., Моргун Е.Г.** Физико-математические аспекты мессбауровской спектроскопии в применении к некоторым задачам почвоведения..... 374

Научное издание

**МАТЕМАТИКА
И
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 12

Ответственный редактор Ю.К. Оленикова

Редактор М.А. Канакотина

Подписано в печать 27.11.17. Формат 60x84 1/16. Бумага белая.
Гарнитура Таймс. Офсетная печать
Усл. печ. л. 22,90. Уч.-изд. л. 22,88. Тираж 40. Заказ

Ярославский государственный технический университет
152023, Ярославль, Московский пр., 88

Издательский дом ЯГТУ
150000, Ярославль, ул. Советская, 14а

Для заметок

Для заметок